

# MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS

F. VADILLO

RESUMEN. En esta lección se explica los métodos en diferencias finitas para problemas parabólicos. Después de definir los conceptos básicos de consistencia, estabilidad y convergencia, se demuestra el teorema de equivalencia de Lax.

En la segunda parte se obtiene la condición de Von Neumann para la estabilidad, se explica el funcionamiento del comando `pdepe` de MATLAB y finalmente se aplican los métodos comentados a problemas con varias variables espaciales.

## ÍNDICE

1. La ecuación del calor	1
2. Semi-discretización espacial	3
3. Los métodos de Euler y Crank-Nicolson	5
4. El teorema de Equivalencia de Lax	7
5. La condición de Von Neumann para la estabilidad	10
6. Otros métodos en diferencias	14
7. El comando <code>pdepe</code> de MATLAB	16
8. Problemas multi-dimensionales	17
8.1. Métodos A.D.I	18
8.2. Métodos de paso fraccionario	19
Referencias	20

## 1. LA ECUACIÓN DEL CALOR

La ecuación del calor es la ecuación parabólica que aparece en todos los modelos matemáticos relacionados con problemas de difusión y Mecánica de Fluidos.

Se considera el problema de Cauchy:

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

cuya solución exacta es:

$$(1.2) \quad u(x, t) = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y) dy,$$

---

Received by the editors 10 de febrero de 2009.  
Disponible en: [www.ehu.es/~mepvaarf](http://www.ehu.es/~mepvaarf).

donde ya se aprecia que tiene una **velocidad de propagación infinita** porque los valores de la condición inicial  $\varphi(y)$  en cualquier punto  $y \in \mathbb{R}^N$  intervienen en la solución  $u$  en todos los puntos  $(x, t)$ .

En la siguiente lista se recogen las **propiedades básicas** de la ecuación del calor (ver [4]):

1. Velocidad infinita de propagación.
2. Efecto regularizante que implica también irreversibilidad temporal.
3. Principio del máximo: si  $\varphi \geq 0$  entonces  $u \geq 0$ . En realidad  $u$  es positivo salvo que  $\varphi \equiv 0$ .
4. Conservación de la masa:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

5. Decaimiento de la solución:

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-N/2} \|\varphi(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall t > 0.$$

Los detalles y comprobaciones de estas propiedades se pueden consulta en las referencias [4] y [10].

Para comenzar se considerará la **ecuación del calor uni-dimensional** en el siguiente problema:

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Esta ecuación modela la distribución de la temperatura en un alambre de longitud  $\pi$  aislado, con los extremos a cero grados y partiendo de la distribución inicial de temperaturas  $\varphi(x)$ .

El **método de separación de variables** calcula la solución en forma de serie de Fourier:

$$(1.4) \quad u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_j e^{-j^2 t} \omega_j(x),$$

donde las  $\omega_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$  son las autofunciones y  $\widehat{\varphi}_j$  son los coeficientes de Fourier de  $\varphi \in L^2(0, \pi)$ , es decir:

$$(1.5) \quad \widehat{\varphi}_j = \int_0^\pi \varphi(x) \omega_j(x) dx.$$

De la expresión (1.4) se deduce entonces que:

$$(1.6) \quad \|u(t)\|_{L^2(0, \pi)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_j(x)|^2 e^{-2j^2 t} \leq e^{-2t} \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_j(x)|^2 = e^{-2t} \|\varphi\|_{L^2(0, \pi)}^2,$$

que demuestra como **la solución decrece exponencialmente cuando  $t \rightarrow \infty$**  en contra del decrecimiento potencial en el decaimiento de la solución comentado en las propiedades anteriores.

Este mismo resultado se alcanza estudiando la **evolución de la energía del sistema**:

$$(1.7) \quad E(t) = \int_0^\pi u^2(x, t) dx,$$

porque se comprueba que:

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt}E(t) \leq -2E(t)$$

de donde se deduce la misma desigualdad (1.6).

Como la solución es la serie infinita (1.4), un posible primer intento de aproximación sería **truncar la serie**, es decir, para cada número natural  $M$  estimar las sumas parciales:

$$(1.9) \quad u_M(x, t) = \sum_{j=1}^M \widehat{\varphi}_j e^{-j^2 t} \omega_j(x).$$

con una evidente cota de error:

$$(1.10) \quad \|u(x, t) - u_M(x, t)\|_{L^2(0, \pi)} \leq e^{-M^2 t/2} \|\varphi(x)\|_{L^2(0, \pi)}, \quad \forall t > 0$$

lo que demuestra la **convergencia en norma  $L^2$  cuando  $M \rightarrow \infty$** . El problema para utilizar este método de las series de Fourier truncadas es que se necesitan conocer las autofunciones del laplaciano con las condiciones fronteras y en el dominio del problema que se estudia, y aunque la teoría espectral garantiza la existencia de la sucesión de autofunciones que forman una base ortogonal, el problema es que estas **autofunciones sólo se pueden calcular en casos muy particulares**.

## 2. SEMI-DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

Discretizando la variable  $x$  con un paso  $h = \frac{\pi}{M+1}$  y utilizamos la clásica aproximación de tres puntos para la segunda derivada se llega a un sistema de  $M$  ecuaciones diferenciales ordinarias lineales acopladas:

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_j(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} = 0, & j = 1, \dots, M \quad t > 0 \\ u_0(t) = u_{M+1}(t) = 0, & t > 0 \\ u_j(0) = \varphi(jh), & j = 1, \dots, M \end{cases},$$

que de manera vectorial puede escribirse de la forma siguiente:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{u}(t) + A_h \vec{u}(t) = \vec{0}, \\ \vec{u}(0) = \vec{\varphi}. \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix}, \quad A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

cuya solución exacta es:

$$(2.4) \quad \vec{u}(t) = e^{-t A_h} \vec{\varphi}.$$

El sistema (2.1) también verifica un **principio del máximo** según el cual si el dato inicial es no negativo, la solución también lo es para todo  $x$  y todo  $t$ .

También se puede hacer un **análisis de Fourier** del sistema (2.1). Si se considera el problema de autovalores:

$$(2.5) \quad A_h \vec{w} = \lambda \vec{w},$$

los autovalores son:

$$(2.6) \quad \lambda_l(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( l \frac{h}{2} \right), \quad l = 1, \dots, M,$$

y los autovectores asociados:

$$(2.7) \quad \vec{w}_l(h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} \sin(lx_1) \\ \vdots \\ \sin(lx_M) \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, M,$$

donde se refleja que cuando  $h \rightarrow 0$  los autovalores y autovectores del problema semi-discreto convergen a los autovalores y autovectores del problema continuo.

Este análisis de Fourier construiría una solución del tipo:

$$(2.8) \quad \vec{u}_h(t) = \sum_{l=1}^M \hat{\varphi}_l e^{-\lambda_l(h)t} \vec{w}_l(h),$$

porque los autovectores ahora son ortogonales respecto de una versión discreta de la norma  $L^2$  y después se demostraría la convergencia, es decir, se comprobaría que los errores  $\vec{u}_h(t) - \vec{u}(t)$  **tienden a cero cuando  $t \rightarrow 0$** , donde  $\vec{u}(t)$  es la restricción de la solución exacta de (1.3) en los nodos de la red.

Otra técnica para demostrar la convergencia de la solución del sistema semi-discreto (2.1) a la solución de la ecuación del calor (1.3) es el denominado **método de la energía** que consiste en estudiar como evoluciona una versión discreta de la energía:

$$(2.9) \quad E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |u_j|^2.$$

Los dos lemas siguientes son necesarios para demostrar la convergencia:

**Lema 2.1.**

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} E_h(t) = -h \sum_{j=0}^M \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2.$$

**Lema 2.2 (Versión discreta de la desigualdad de Poincaré).** *Para todo  $\delta > 0$  existe un  $h_0 > 0$  tal que para todo  $0 < h < h_0$  y para toda sucesión  $a_0, a_1, \dots, a_{M+1}$  con  $a_0 = a_{M+1} = 0$  se tiene:*

$$(2.11) \quad h \sum_{j=0}^M \left| \frac{a_{j+1} - a_j}{h} \right|^2 \geq (1 - \delta) h \sum_{j=1}^M |a_j|^2.$$

Para demostrar la convergencia de la solución de la ecuación semi-discreta  $u_j$  a la solución exacta, se considere ahora la solución exacta sobre la malla  $\underline{u}_j$ , y se estudia el vector de errores:

$$(2.12) \quad \vec{e} = \{e_j\}_{j=1, \dots, M}, \quad e_j = \underline{u}_j - u_j.$$

Resulta evidente que las  $e_j$  satisfacen:

$$(2.13) \quad \begin{cases} e'_j - \frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{h^2} = \varepsilon_j, & j = 1, \dots, M \quad t > 0 \\ e_0 = e_{M+1} = 0, & t > 0 \\ e_j(0) = 0, & j = 1, \dots, M \end{cases},$$

donde  $\varepsilon_j$  son los errores de truncatura locales:

$$(2.14) \quad \varepsilon_j = \underline{u}_{xx}(x_j, t) - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}$$

que como son aproximaciones de orden dos verifican que:

$$(2.15) \quad |\varepsilon_j(t)|^2 \leq Ch^4 \|u(t)\|_{C^4([0, \pi])}^2,$$

para  $1 \leq j \leq M$ ,  $0 \leq h \leq h_0$   $0 \leq t \leq T$ .

Repitiendo las operaciones del lema primero, se obtiene ahora que:

$$(2.16) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |e_j|^2 \right] = -h \sum_{j=0}^M \left| \frac{e_{j+1} - e_j}{h} \right|^2 + h \sum_{j=1}^M \varepsilon_j e_j,$$

y utilizando la desigualdad de Poincaré con  $\delta = 1/2$  se tiene:

$$(2.17) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |e_j|^2 \right] \leq -\frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |e_j|^2 + h \sum_{j=1}^M \varepsilon_j e_j \leq \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |\varepsilon_j|^2,$$

de donde se llega a:

$$(2.18) \quad h \sum_{j=1}^M |e_j(t)|^2 \leq h \sum_{j=1}^M \int_0^T |\varepsilon_j(t)|^2 dt, \quad 0 < h < h_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Usando ahora desigualdad (2.15) se llega finalmente a:

$$(2.19) \quad \|\tilde{e}\|_h^2 = h \sum_{j=1}^M |e_j(t)|^2 \leq Ch^4 \int_0^T \|u(t)\|_{C^4([0, \pi])}^2 dt,$$

que demuestra la **convergencia de orden dos siempre que la integral sea finita**.

### 3. LOS MÉTODOS DE EULER Y CRANK-NICOLSON

El método de las diferencias finitas consiste en discretizar las variables y sustituir en la ecuación diferencial las derivadas por cocientes en diferencias, y de esta forma, el problema que se pueda aproximar por algún procedimiento finito, habitualmente se llegará a sistemas de ecuaciones lineales.

Sean entonces  $h$  y  $k$  los pasos en  $x$  y  $t$  que definen una red de puntos  $(x_j, t^n)$  con  $x_j = jh$  y  $t^n = nk$ . Los métodos en diferencias calculan aproximaciones a los valores de  $u(x, t)$  en los puntos de la malla:  $U_j^n \approx u(x_j, t^n)$ .

Las fórmulas en diferencias más sencillas para aproximar las derivadas  $u_t(x, t)$  y  $u_{xx}(x, t)$  son respectivamente:

$$(3.1) \quad u_t(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + \mathbf{O}(k),$$

$$(3.2) \quad u_{xx}(x, t) = \frac{u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)}{h^2} + \mathbf{O}(h^2).$$

Aplicadas estas aproximaciones en los puntos de la red y despreciando los términos  $\mathbf{O}(k)$  y  $\mathbf{O}(h^2)$  resulta el esquema en diferencias llamado [método de Euler](#):

$$(3.3) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2},$$

que es una aproximación a la ecuación diferencial del problema (1.3). Por comodidad, se toma  $r = \frac{k}{h^2}$  y se reordenan los términos para obtener el esquema en diferencias explícito:

$$(3.4) \quad U_j^{n+1} = (1 - 2r)U_j^n + r(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n).$$

El programa `forwdif` de [5] implementa este método en MATLAB. En el ejemplo representado en la figura 1 se considera la condición inicial  $\varphi(x) = x(\pi - x)$  con  $h = \pi/5$  en  $0 \leq t \leq 3$  y dos diferentes pasos en el tiempo, a la izquierda  $k = 3/20$  y a la derecha  $k = 3/10$ . La diferencia entre las soluciones es evidente, en la parte derecha se aprecian oscilaciones que ensucian la solución exacta, se trata de un claro ejemplo de inestabilidad que mas tarde se estudiara. La condición de estabilidad del método será  $r \leq 1/2$  y mientras que en primer caso  $r = 0,38$  en segundo  $r \approx 0,75$ .

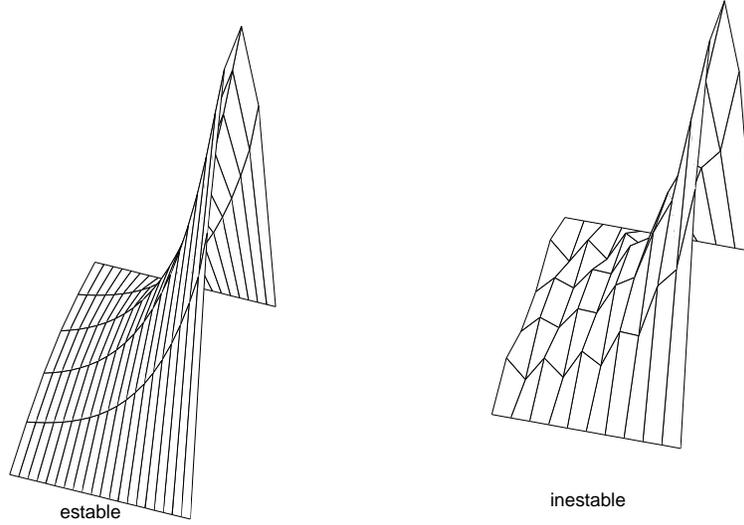


FIGURA 1. Efecto de la inestabilidad

La condición de estabilidad puede llegar a ser una problema grave porque si se precisara utilizar un  $k$  de orden de una décima, entonces el  $h$  debiera ser del orden de centésimas y ello encarecería mucho el coste computacional. Por tanto, parece necesario conocer otros esquemas que no tengan este inconveniente y uno de los más conocidos es el [método de Crank-Nicolson](#).

La idea del este método es aproximar la ecuación del calor en un punto intermedio de la red:  $(x, t + \frac{k}{2})$  de la forma siguiente:

$$(3.5) \quad u_t(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} + \mathbf{O}(k^2),$$

$$(3.6) \quad u_{xx}(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{1}{2h^2} [u(x - h, t + k) - 2u(x, t + k) + u(x + h, t + k) + u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)] + \mathbf{O}(h^2),$$

que aplicadas en los puntos de la red y despreciando los términos  $\mathbf{O}(k^2)$  y  $\mathbf{O}(h^2)$  resulta el esquema implícito:

$$(3.7) \quad -rU_{j-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_j^{n+1} - rU_{j+1}^{n+1} = rU_{j-1}^n + (2 - 2r)U_j^n + rU_{j+1}^n,$$

donde nuevamente  $r = \frac{k}{h^2}$ , y el índice  $j = 1, \dots, N - 1$  suponiendo que  $h = \frac{\pi}{N}$ . Este conjunto de  $N - 1$  ecuaciones deben resolverse de manera conjunta porque las ecuaciones no se desacoplan como en el método explícito (3.4). Para calcular las aproximaciones en el nivel de tiempo  $n + 1$  con los datos del nivel  $n$  se tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales:

$$(3.8) \quad AU^{n+1} = \mathbf{b},$$

donde:

$$(3.9) \quad A = \begin{bmatrix} 2 + 2r & -r & & & \\ -r & 2 + 2r & -r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -r & 2 + 2r \end{bmatrix},$$

$$(3.10) \quad \mathbf{U}^{n+1} = \begin{bmatrix} U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} U_3^n + (2 - 2r)U_2^n \\ U_2^n + (2 - 2r)U_3^n + U_4^n \\ \vdots \\ U_{N-2}^n + (2 - 2r)U_{N-1}^n \end{bmatrix}.$$

El método de Crank-Nicholson (3.7) tiene entonces el inconveniente del sistema que se debe resolver en cada nivel de tiempo, pero no necesita condición de estabilidad que condicione los tamaños de los pasos, es **incondicionalmente estable**, y los errores nunca aumentan independientemente de cuales sean la relación entre los pasos  $h$  y  $k$ . La referencia [11] en el capítulo 9 implementa y compara ambos algoritmos.

#### 4. EL TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE LAX

El problema de una manera abstracta tiene el siguiente planteamiento: **dado un espacio de Banach  $\mathcal{B}$ , se trata de hallar una familia  $u(t) \in \mathcal{B}$ , donde  $t$  es un parámetro real, tal que**

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_t(t) = Au(t) & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

donde  $A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  es un operador lineal y  $u_0 \in \mathcal{B}$  representa el estado inicial del sistema. De hecho bastaría con que el operador  $A$  estuviera definido en un subconjunto denso del espacio  $\mathcal{B}$  (ver [7]).

Se supone que el problema (4.1) está bien definido en el sentido de que existe una única solución para cada  $u_0 \in \mathcal{B}$  que depende continuamente del dato inicial. Por ejemplo, para la ecuación del calor  $\mathcal{B} = L^2$  y el operador  $A = \partial_x^2$ .

El siguiente paso consiste en definir un esquema en diferencias también en sentido abstracto, esto significa que se tiene una familia de operador lineales:

$$(4.2) \quad S_k : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B},$$

donde el subíndice  $k$  es el parámetro del que depende la discretización (paso en el tiempo  $t$ ), y para aproximar la solución del problema (4.1) en sucesivos niveles de tiempo:

$$(4.3) \quad U^{n+1} = S_k U^n \quad \Rightarrow \quad U^n = S_k^n U^0,$$

donde  $S_k^n = (S_k)^n$ , es decir, el número  $n$  indica una potencia y no un superíndice. Por simplicidad se supone que los operadores  $A$  y  $S_k$  no dependen explícitamente del tiempo, aunque la teoría se puede extender a estos casos. Tampoco aparece explícitamente la dependencia del paso  $h$  aunque se supone  $h = h(k)$ , si hubiera varias variables espaciales se supone que para cada una de ellas  $h_j = h_j(k)$ .

**Definición 4.1.** Se dice que  $\{S_k\}$  tiene **orden de exactitud**  $p$  si

$$(4.4) \quad \|u(t+k) - S_k u(t)\| = \mathbf{O}(k^{p+1}), \quad \text{cuando } k \rightarrow 0,$$

para todo  $t \in [0, T]$  y suponiendo  $u(t)$  suficientemente regular. Se dice que el esquema es **consistente** con el problema si  $p > 0$ .

El término que aparece en el interior de la norma de la definición 4.1 que es el error que comete la solución exacta en el esquema en diferencias, se denomina **error del truncatura local** de  $\{S_k\}$ .

Los **errores globales** son la diferencia entre las soluciones exacta y aproximada:  $e_n = u(nk) - (S_k)^n u_0$ . Evidentemente para que un método sea útil estos errores deben hacerse tan pequeños como se quiera siempre que se tome el parámetro  $k$  adecuado (suficientemente pequeño). Se tiene entonces la definición de convergencia:

**Definición 4.2.** Se dice que  $\{S_k\}$  es **convergente** si

$$(4.5) \quad \lim_{k \rightarrow 0, nk=t} \|S_k^n u(0) - u(t)\| = 0,$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

Según esta definición, para demostrar que un esquema es convergente habría que calcular los errores globales para lo que sería preciso conocer la solución exacta, pero si se conociera la solución exacta poco interés puede tener calcular soluciones aproximadas. Para evitar manipular errores globales se introduce el concepto de estabilidad:

**Definición 4.3.** Se dice que  $\{S_k\}$  es **estable**, si existe alguna constante  $C > 0$  tal que:

$$(4.6) \quad \|S_k^n\| \leq C,$$

para todo  $n$  y  $k$  tal que  $0 \leq nk \leq T$ .

Es importante destacar que las definiciones de consistencia y convergencia hacen referencia a la solución de la ecuación diferencial, pero la definición de estabilidad no. **Uno puede decidir si su esquema es estable o no sin mirar la ecuación que está tratando de aproximar.**

*Ejemplo 4.4.* Para el método de Euler (3.4) los autovalores de la matriz que define el operador  $S_k$  son

$$\lambda_j = 1 - 4r \cos^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}, \quad j = 1, \dots, N$$

y su condición de estabilidad  $r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ .

En realidad la condición de estabilidad se puede debilitar porque si existe un número  $\alpha \geq 0$  tal que:

$$(4.7) \quad \|S_k\| \leq 1 + \alpha k,$$

entonces:

$$(4.8) \quad \|S_k^n\| \leq \|S_k\|^n \leq (1 + \alpha k)^n \leq e^{\alpha h k} \leq e^{\alpha T} = C,$$

que implica la estabilidad. De hecho, cuando se estudie la estabilidad de cualquiera esquema se buscarán condiciones del tipo (4.7).

El final de esta teoría es el siguiente famoso teorema:

**Teorema 4.5 (Teorema de equivalencia de Lax).** *Sea  $\{S_k\}$  una aproximación consistente al problema de valores iniciales (4.1). Entonces  $\{S_k\}$  es convergente si y sólo es estable.*

*Demostración.* La demostración de que la consistencia y estabilidad implican la convergencia es sencilla, si se escribe la expresión:

$$(4.9) \quad u((n+1)k) = S_k u(nk) + T_{hk}$$

donde  $T_{hk}$  es el error de truncatura local. Restando (4.3) se tiene la ecuación de los errores:

$$(4.10) \quad e_{n+1} = S_k e_n + T_{hk}$$

y tomando normas:

$$(4.11) \quad \|e_{n+1}\| \leq \|S_k\| \|e_n\| + \|T_{hk}\| \leq \|S_k\|^n \|e_0\| + \|T_{hk}\|.$$

De los dos términos de la de la cota de error, el primero está acotado por la estabilidad y tiende a cero si  $e_0 \rightarrow 0$ , mientras que la convergencia del segundo término es justamente la definición de consistencia.

Los otros detalle de la demostración se pueden consultar en [7] □

Algunos comentarios sobre el contexto donde se puede aplicar el teorema de equivalencia de Lax:

**Problemas lineales de coeficientes variables:** La teoría es aplicable sin ninguna dificultad. Se utiliza el método en condiciones de estabilidad para la familia de problemas que resulte de mantener constantes los coeficientes.

**Sistemas de ecuaciones:** Aunque la teoría se ha expuesto para el caso escalar, evidentemente es extensible para sistemas de ecuaciones.

**Esquema implícitos:** A pesar de que el esquema (4.3) se presente de manera explícita, el caso de implícito no está excluido porque debe existir el operador inverso para llevarlo a la formulación general.

**Esquemas multipaso:** Si bien el esquema (4.3) es de un paso, el caso de esquemas multipaso se puede llevar a la formulación general aumentando la dimensión.

**Condiciones fronteras:** Si el problema tuviera condiciones frontera se deberían incluirse en la definición del espacio funcional.

**Problemas no lineales:** La teoría no es aplicable a este caso, lo habitual en los problemas no lineales es investigar las condiciones de estabilidad del problema linealizado y utilizarlas para resolver el problema no lineal. Con mucha frecuencia los resultados son bastante buenos, pero ello no quita que puedan aparecer inestabilidades de tipo no lineal.

## 5. LA CONDICIÓN DE VON NEUMANN PARA LA ESTABILIDAD

Von Neumann realiza un análisis de Fourier del método en diferencias, la idea básica consiste en expresar el dato inicial en el espacio de Fourier y después analizar la propagación de los errores en dicho espacio para todas las frecuencias  $\xi$ .

Se considerará en primer lugar el caso de una fórmula **explícita de un paso**:

$$(5.1) \quad U_j^{n+1} = (SU^n)_j = \sum_{\mu=-l}^r \alpha_\mu U_{j+\mu}^n,$$

donde los  $\{\alpha_\mu\}$  son constantes y  $S$  es el operador para pasar del nivel  $n$  al  $n+1$  definido de  $\ell_h^2$  en si mismo espacio porque se trata de una suma finita.

También se escribir como una convolución discreta

$$(5.2) \quad SU = a * U, \quad \text{con} \quad a_\mu = \frac{1}{h}(\alpha_{-\mu}),$$

porque

$$(5.3) \quad (a * U)_j = h \sum_k a_{j-k} U_k = h \sum_k \frac{1}{h} \alpha_{k-j} U_k = \sum_p \alpha_p U_{j+p},$$

y por tanto

$$(5.4) \quad \widehat{SU}(\xi) = \widehat{a * U}(\xi) = \hat{a}(\xi) \hat{U}(\xi),$$

lo que indica que  $\hat{a}(\xi)$  es el **factor de amplificación** que multiplica a la componente de  $U$  para el número de frecuencia  $\xi$  cuando se aplica el operador  $S$ . Habitualmente este factor de amplificación se denota por  $g(\xi)$ .

Debido a la linealidad del problema, para determinar el factor de amplificación es suficiente insertar la solución  $U_j^n = g^n e^{i\xi j h}$  en el esquema en diferencias y encontrar la expresión  $g = g(\xi)$  que resulta.

Utilizando la igualdad de Parseval

$$(5.5) \quad \|SU\| = \|\widehat{SU}\| = \|g\widehat{U}\| \leq \|g\|_\infty \|\widehat{U}\|,$$

lo que implica que  $\|S\| \leq \|g\|_\infty$ , sin embargo, como la cota se alcanza (bastaría tomar toda la masa en una frecuencia concreta) se tiene que:

$$(5.6) \quad \|S\| = \sup_{U \in \ell_h^2} \frac{\|SU\|}{\|U\|} = \|g\|_\infty.$$

Aplicando la iteración desde el nivel cero hasta el  $n$  es evidente que:  $U^n = S^n U^0$  y entonces  $\widehat{U}^n(\xi) = (g(\xi))^n \widehat{U}^0(\xi)$ . Cuando  $g(\xi)$  es una función escalar:

$$(5.7) \quad \|(g(\xi))^n\|_\infty = \max_{\xi} (|g(\xi)|^n) = \max_{\xi} (|g(\xi)|)^n = (\|g\|_\infty)^n,$$

y repitiendo argumentos anteriores

$$(5.8) \quad \|S^n\| = (\|g\|_\infty)^n = \|S\|^n,$$

con lo que se concluye el siguiente teorema

**Teorema 5.1.** Si la fórmula en diferencias finitas (5.1) define un operador lineal acotado  $S : \ell_h^2 \rightarrow \ell_h^2$ , entonces:

$$(5.9) \quad \|S^n\| = (\|g\|_\infty)^n, \quad \forall n > 0.$$

Este teorema interpretado para la estabilidad dice lo siguiente

**Corolario 5.2.** Una fórmula en diferencias lineal explícita, escalar y de un paso es estable si y solo si:

$$(5.10) \quad |g(\xi)| = 1 + \mathbf{O}(k),$$

cuando  $k \rightarrow 0$  y uniformemente en  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ .

La condición (5.10) se la denomina **condición de Von Neuman** de la fórmula en diferencias, y el resultado establece que **para un esquema lineal explícito escalar y de un paso, la condición de Von Neumann es necesaria y suficiente para la estabilidad.**

*Ejemplo 5.3.* En el método de Euler (3.4) para la ecuación del calor (1.3), es fácil comprobar que  $g(\xi) = 1 - 4r \sin^2 \frac{\xi h}{2}$ . Entonces es estable si y sólo si:

$$(5.11) \quad -1 \leq 1 - 4r \sin^2 \frac{\xi h}{2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad r \leq \frac{1}{2}.$$

Una **fórmula en diferencias lineal de un paso** es de la forma:

$$(5.12) \quad \sum_{\mu=-l}^r \beta_\mu U_{j+\mu}^{n+1} = \sum_{\mu=-l}^r \alpha_\mu U_{j+\mu}^n,$$

para algunas constantes  $\{\alpha_\mu\}$  y  $\{\beta_\mu\}$  con  $\beta_0 \neq 0$ . Si  $\beta_\mu = 0$  para  $\mu \neq 0$  la fórmula es **explícita**, mientras que si  $\beta_\mu \neq 0$  para algún  $\mu \neq 0$  es **implícita**.

Para definir ahora el operador  $S : U^n \rightarrow U^{n+1}$  se debe ser mas cuidadoso porque dada una sucesión  $U^n$  la nueva sucesión  $U^{n+1}$  se obtiene de un sistema de ecuaciones lineales que se pueden expresar como:

$$(5.13) \quad BU^{n+1} = AU^n,$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices tipo Toeplitz (ver por ejemplo [3]).

La ecuación (5.12) se puede escribir usando la convolución como:

$$(5.14) \quad b * U^{n+1} = a * U^n,$$

donde  $a_\mu = \frac{1}{h}\alpha_{-\mu}$  y  $b_\mu = \frac{1}{h}\beta_{-\mu}$ , y la cuestión que se plantea es si **dada una sucesión  $U^n$  existe una única la sucesión  $U^{n+1}$  que resuelve el sistema de ecuaciones lineales.** La respuesta es **no**.

*Ejemplo 5.4.* El método de Crank-Nicolson (3.7) para la ecuación del calor

$$(5.15) \quad -rU_{j-1}^{n+1} + (2+2r)U_j^{n+1} - rU_{j+1}^{n+1} = rU_{j-1}^n + (2-2r)U_j^n + rU_{j+1}^n,$$

se supone que  $U_j^n = 0, \forall j$ , el sistema que resulta es

$$(5.16) \quad -rU_{j-1}^{n+1} + (2+2r)U_j^{n+1} - rU_{j+1}^{n+1} = 0,$$

que tiene la solución trivial  $U_j^{n+1} = 0, \forall j$ . Por otra parte, se trata de una ecuación en diferencias lineal para la que se pueden buscar soluciones del tipo exponencial  $U_j^{n+1} = \kappa^j$ , donde  $\kappa$  es una raíz del polinomio característico:

$$(5.17) \quad -r\kappa^2 + (2+2r)\kappa - r = 0,$$

y por lo tanto existen también soluciones no triviales. La condición para evitar esta ambigüedad se vera a continuación.

Sean  $U^n$  y  $U^{n+1}$  dos sucesiones de  $\ell_h^2$  que satisfacen (5.14), pasando al espacio de Fourier se tiene:

$$(5.18) \quad \hat{b}(\xi)\widehat{U^{n+1}}(\xi) = \hat{a}(\xi)\widehat{U^n}(\xi),$$

para  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ . Suponiendo ahora que es cierta la **hipótesis de resolubilidad** que dice que  $\hat{b}(\xi) \neq 0, \forall \xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ , se puede escribir

$$(5.19) \quad \widehat{U^{n+1}}(\xi) = g(\xi)\widehat{U^n}(\xi) = \frac{\hat{a}(\xi)}{\hat{b}(\xi)}\widehat{U^n}(\xi),$$

donde nuevamente  $g(\xi)$  es el factor de amplificación. Si  $g(\xi)$  es una función continua en el compacto  $[-\pi/h, \pi/h]$  entonces:

$$(5.20) \quad \|g\|_\infty = \max_{\xi \in [-\pi/h, \pi/h]} \frac{\hat{a}(\xi)}{\hat{b}(\xi)} < \infty,$$

y se puede concluir que **para un esquema lineal, escalar y de un paso, la condición de Von Neumann (5.10) es también necesaria y suficiente para la estabilidad numérica.**

*Ejemplo 5.5.* Si se insertando la solución  $U_j^n = g^n e^{i\xi j h}$  en el método de Crank-Nicolson (3.7) para la ecuación del calor unidimensional se obtiene que:

$$(5.21) \quad g(\xi) = \frac{\hat{a}(\xi)}{\hat{b}(\xi)} = \frac{1 - 2r \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2r \sin^2 \frac{\xi h}{2}} < 1,$$

por lo que se trata de un método incondicionalmente estable.

Las extensión del análisis de Fourier a [fórmulas vectoriales o multipaso](#) no presenta demasiadas novedades. En el caso del multipaso primero se reducirá a otra fórmula vectorial de un paso a costa de aumentar la dimensión.

Sea entonces una fórmula lineal de un paso (5.12) con la novedad de que ahora los  $U_j^n$  son vectores de dimensión  $N$  lo mismo que los  $\alpha_\mu$  y  $\beta_\mu$  son matrices  $N \times N$ . Los operadores  $A$  y  $B$  son tensores.

Usando nuevamente la convolución y pasando al espacio de Fourier se tendrá una [matriz de amplificación](#) de  $N \times N$ :

$$(5.22) \quad G(\xi) = [\hat{b}(\xi)]^{-1}[\hat{a}(\xi)].$$

La estabilidad del método pedirá que exista una constante  $C$  tal que

$$(5.23) \quad \|G(\xi)^n\| \leq C,$$

para todo  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$  y todo  $n, k$  con  $0 \leq nk \leq T$ .

Para estimar estas normas se dispone ahora de dos desigualdades:

$$(5.24) \quad \rho(G(\xi)^n) \leq \|G(\xi)^n\| \leq \|G(\xi)\|^n,$$

donde el  $\rho(G)$  indica el radio espectral de la matriz  $G$ . El resultado de estabilidad entonces será el siguiente teorema:

**Teorema 5.6.** *Para una fórmula en diferencias finitas lineal de coeficientes constante con matriz de amplificación  $G(\xi)$  se tiene lo dos resultados siguientes:*

- (a)  $\rho(G(\xi)) \leq 1 + \mathbf{O}(k)$  es una *condición necesaria para la estabilidad*.
- (b)  $\|G(\xi)\| \leq 1 + \mathbf{O}(k)$  es una *condición suficiente para la estabilidad*.

La dos condiciones se entiende que son para cuando  $k \rightarrow 0$  y uniformemente en  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ . La condición sobre el espectro de la matriz de amplificación se denomina [condición de Von Neuman](#).

*Ejemplo 5.7.* El método leap frog para aproximar la ecuación del calor unidimensional es la fórmula de dos pasos:

$$(5.25) \quad U_j^{n+1} = U_j^{n-1} + 2r(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n).$$

con  $r=k/h^2$ . Para escribirlo como una fórmula de un paso se introduce una nueva variable:

$$(5.26) \quad W_j^n = \begin{pmatrix} U_j^n \\ U_j^{n-1} \end{pmatrix},$$

con lo que resulta el esquema de un paso:

$$(5.27) \quad W_j^{n+1} = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_{j-1}^n + \begin{pmatrix} -4r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_j^n + \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W_{j+1}^n,$$

que se puede escribir de la forma:

$$(5.28) \quad W_j^{n+1} = \alpha_{-1}W_{j-1}^n + \alpha_0W_j^n + \alpha_1W_{j+1}^n,$$

con las matrices:

$$(5.29) \quad \alpha_{-1} = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} -4r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de amplificación que resulta es:

$$(5.30) \quad G(\xi) = \begin{pmatrix} -8r \sin^2 \frac{\xi h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y su polinomio característicos es:

$$(5.31) \quad \lambda^2 + 8r\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2} - 1 = 0,$$

llamando  $\gamma = 8r \sin^2 \frac{\xi h}{2}$ , sus raíces son:

$$(5.32) \quad \lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2},$$

y para su raíz negativa se verifica que:

$$(5.33) \quad \lambda < \frac{-\gamma - \sqrt{4}}{2} < -1,$$

de donde se concluye que es un esquema inestable.

Otra forma más rápida de llegar al mismo resultado consiste en insertar en (5.25) la solución  $U_j^n = g^n e^{i\xi j h}$ , la ecuación que queda para la incógnita  $g$  es:

$$(5.34) \quad g^2 = 1 + 2rg(e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h}) = 1 - 8rg \sin^2 \frac{\xi h}{2},$$

que es el polinomio característico anterior.

La conclusión importante es que la **condición de Von Neumann es necesaria pero no suficiente para la estabilidad, aunque en la práctica los esquemas en diferencias se utilizan en dichas condiciones, ello es debido a que las pocas condiciones necesarias y suficientes que se conocen son demasiado complicadas de comprobar (ver por ejemplo [7]).**

## 6. OTROS MÉTODOS EN DIFERENCIAS

Hasta ahora se ha considerado tres métodos en diferencias para aproximar la ecuación del calor uni-dimensional con las siguientes propiedades:

Método	Orden de exactitud	Estabilidad
Euler	1	$r \leq \frac{1}{2}$
Crank-Nicolson	2	incondicionalmente estable
Leap frog	2	inestable.

Para construir otros métodos con propiedades distintas, lo más cómodo es utilizar los **operadores en diferencias**. Para una función definida sobre los puntos de la red  $v_j^n = v(x_j, t^n)$  se definen en primer lugar el operador elevador:  $Kv_j^n = v_{j+1}^n$  y los siguientes operadores en diferencias espaciales

Promedio progresivo:	$\mu_+ v_j^n = \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_j^n)$
Promedio regresivo:	$\mu_- v_j^n = \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n)$
Promedio central:	$\mu_0 v_j^n = \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)$
Diferencia progresiva:	$D_+ v_j^n = \frac{1}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n)$
Diferencia regresiva:	$D_- v_j^n = \frac{1}{h}(v_j^n - v_{j-1}^n)$
Diferencia central:	$\delta v_j^n = \frac{1}{h}(v_{j+1/2}^n - v_{j-1/2}^n)$
Diferencia central de segundo orden:	$\delta^2 v_j^n = \frac{1}{h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$

Es evidente que las diferencias progresivas y regresivas son aproximaciones de primer orden a la primera derivada en  $x$ , mientras que la diferencia central aproxima también la primera derivada pero con orden dos. En cuando a la diferencia central de segundo orden es una estimación de la segunda derivada de orden dos.

Para la discretización en tiempo se utilizara exactamente la misma notación pero en lugar de los sub-índices se escribirán super-índices:

Promedio progresivo:	$\mu^+ v_j^n = \frac{1}{2}(v_j^{n+1} + v_j^n)$
Promedio regresivo:	$\mu^- v_j^n = \frac{1}{2}(v_j^n + v_j^{n-1})$
Promedio central:	$\mu^0 v_j^n = \frac{1}{2}(v_j^{n+1} + v_j^{n-1})$
Diferencia progresiva:	$D^+ v_j^n = \frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n)$
Diferencia regresiva:	$D^- v_j^n = \frac{1}{k}(v_j^n - v_j^{n-1})$
Diferencia central:	$\delta^t v_j^n = \frac{1}{k}(v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2})$
Diferencia central de segundo orden:	$(\delta^t)^2 v_j^n = \frac{1}{k^2}(v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1})$

En realidad unos operadores se pueden escribir en función de otros, por ejemplo  $\delta^t = \frac{1}{k^2}(Z - 2I + Z^{-1})$  donde  $Z$  sería el elevador en  $t$  e  $I$  el operador identidad.

En esta notación los tres métodos anteriores se escriben de la siguiente manera:

Euler	$D^+ v = \delta^2 v,$
Crank-Nicolson	$D^+ v = \mu^+ \delta^2 v,$
Leap-Frog	$\delta^0(2k)v = \delta^2 v.$

En la siguiente tabla se recogen otros métodos habituales en la bibliografía:

BOX	$(\frac{5}{6}I + \frac{1}{6}\mu_0)\delta^+v = \mu^+\delta v,$
Crank-Nicolson de orden cuatro	$\delta^+v = \mu^+[\frac{4}{3}\delta(h) - \frac{1}{3}\delta(2h)]v,$
Dufort-Frankel	$\delta^+v = \frac{1}{h^2}(K - 2\mu^0 + K^{-1})v.$

## 7. EL COMANDO PDEPE DE MATLAB

El comando `pdepe` de MATLAB resuelve sistemas de P.D.E. parabólicas y elípticas del tipo:

$$(7.1) \quad c\left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x}\right) \frac{\delta u}{\delta t} = x^{-m} \frac{\delta}{\delta x} \left( x^m f\left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x}\right) \right) + s\left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x}\right),$$

donde  $a \leq x \leq b$  y  $t_0 \leq t \leq t_f$  y el entero  $m = 0, 1, 2$  que corresponden al tipo de coordenadas. La función  $c$  es una matriz diagonal y las funciones vectoriales  $f$  y  $s$  son los flujos y las fuentes.

La condición inicial es:  $u(x, t_0) = u_0(x)$  y las condiciones frontera en  $x = a$  es

$$(7.2) \quad p_a(x, t, u) + q_a(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x}\right) = 0$$

y en  $x = b$

$$(7.3) \quad p_b(x, t, u) + q_b(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x}\right) = 0$$

La llamada a `pdepe` tiene el formato general:

```
sol=pdepe(m,@pdefun,@pdeic,@pdebc,xmesh,tspan,options,p1,p2,...)
```

donde las funciones tiene la forma:

```
function [c,f,s] = pdefun(m,x,t,u,DuDx,p1,p2,...)
```

```
function u0= pdeic(x,p1,p2,...)
```

```
function [pa,qa,pb,qb] = pdebc(xa,ua,xb,ub,t,p1,p2,...)
```

`xmesh` es la red de punto del intervalo  $[a, b]$ , `tspan` es el intervalo de tiempo, y `p1, p2, ...` son posible parámetros del problema.

El argumento del salida `sol(j, k, i)` es la aproximación de la componente  $i$  de la solución en  $(t_j, x_k)$ . Además `pdeval` permite estimar la solución en otros puntos que no son de la red.

El fichero adjuntado `bs.m` resuelve la [ecuación de Black-Scholes](#) famosa por sus aplicaciones en matemática financiera:

$$(7.4) \quad \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + (k - 1) \frac{\delta u}{\delta x} - ku,$$

donde  $k = r/(\sigma^2/2)$ ,  $r = 0,065$ ,  $\sigma = 0,8$ ,  $a = \log(2/5)$ ,  $b = \log(7/5)$ ,  $t_0 = 0$  y  $t_f = 5$ . Las condiciones iniciales y frontera son:

$$(7.5) \quad u(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

$$(7.6) \quad u(a, t) = 0$$

$$(7.7) \quad u(b, t) = \frac{7 - 5e^{-kt}}{5}.$$

8. PROBLEMAS MULTI-DIMENSIONALES

La extensión a más dimensiones espaciales de las técnicas y conceptos aplicados a la ecuación del calor uni-dimensional, no presenta demasiadas dificultades salva las propias de tener más variables y geometrías más complicadas, sin duda las mejores referencias son [9] y [8]. Más concretamente se considerará el problema bidimensional porque para más dimensiones las situaciones son muy parecidas.

La ecuación del calor en dos variables espaciales es:

$$(8.1) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, & (x, y, t) \in \Omega, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \cup \Omega, \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y, t) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $\Omega = (a, b) \times (a, b) \times (0, T)$  y  $\partial\Omega$  su frontera.

Discretizando las variables  $x, y$  con un paso  $h = \frac{b-a}{N+1}$  y aproximando las segundas derivadas por diferencias centrales de segundo orden :

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y, t) \approx \delta_x u(x, y, t) &= \frac{u(x+h, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x-h, y, t)}{h^2}, \\ u_{yy}(x, y, t) \approx \delta_y u(x, y, t) &= \frac{u(x, y+h, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y-h, t)}{h^2}, \end{aligned}$$

el sistema lineal que resulta es  $N^2$ -dimensional y tiene la siguiente expresión:

$$(8.2) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{U}(t) = \mathbf{A} \mathbf{U}(t),$$

donde

$$(8.3) \quad \mathbf{U} = (U_{1,1}, \dots, U_{N,1}, U_{1,2}, \dots, U_{N,2}, \dots, U_{1,N}, \dots, U_{N,N})^T,$$

$$(8.4) \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

con

$$(8.5) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y

$$(8.6) \quad \mathbf{C} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2I & I & & \\ I & -2I & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ & & I & -2I \end{pmatrix}.$$

La matriz  $\mathbf{B}$  está relacionada con la diferencia finita en  $x$  mientras de  $\mathbf{C}$  lo estará con la  $y$ .

Los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  son reales y negativos:

$$(8.7) \quad \lambda_{i,j} = \frac{-4}{h^2} \left( \sin^2 \frac{i\pi}{2(N+1)} + \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)} \right), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

La solución exacta del sistema semi-discreto (8.2) es:

$$(8.8) \quad \mathbf{U}(t) = e^{t(\mathbf{B}+\mathbf{C})} \mathbf{U}(0),$$

que para un paso en el tiempo de longitud  $k$  satisface la recurrencia:

$$(8.9) \quad \mathbf{U}(t+k) = e^{k(B+C)}\mathbf{U}(t).$$

Para construir los sistemas totalmente discretos se puede reemplazar la función exponencial por sus [aproximaciones de Padé](#) (ver [9] página 134). Por ejemplo, la aproximación de Padé (0,1):  $e^{k(B+C)} \approx I + k(B+C)$  y el método discreto es explícito con la expresión

$$(8.10) \quad \mathbf{U}^{n+1} = (I + k(B+C))\mathbf{U}^n,$$

Los autovalores de la matriz del método  $I + k(B+C)$  son  $1 + k\lambda_{i,j}$  por lo que es evidente que la condición de Von Neumann es

$$(8.11) \quad \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Considerando las expresiones de las matrices  $B$  y  $C$ , también se puede escribir la [ecuación del método punto a punto](#)

$$(8.12) \quad U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \frac{k}{h^2}(U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) + \frac{k}{h^2}(U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n).$$

De donde se puede hallar el error de truncatura local que es  $O(k+h^2)$  y si se quisiera hacer el [análisis de Von Neumann](#) bastaría insertar en ella la expresión del método en diferencias  $U_{i,j}^n = g^n e^{i\xi_1 x_i} e^{i\xi_2 y_j}$ .

El método de [Crank-Nicolson](#) se obtiene usando la aproximación de Padé (1,1) resultando método implícito

$$(8.13) \quad \left(I - \frac{k}{2}(B+C)\right)\mathbf{U}^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}(B+C)\right)\mathbf{U}^n,$$

que también se puede escribir como:

$$(8.14) \quad \left(I - \frac{k}{2}B\right)\left(I - \frac{k}{2}C\right)\mathbf{U}^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}B\right)\left(I + \frac{k}{2}C\right)\mathbf{U}^n + \frac{k^2}{4}BC(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n).$$

La expresión punto a punto se puede ver en la página 226 de [9]. Este método evidentemente sigue siendo [incondicionalmente estable](#).

**8.1. Métodos A.D.I.** Un problema muy importante es resolver eficazmente los sistemas lineales muy grandes que aparecen en este tipo de métodos, en general, son sistemas con matrices con bandas muy anchas. Una de las opciones habituales son los llamados métodos A.D.I. (Alternating Direction Implicit), cuya idea principal [consiste en resolver dos sistemas lineales de la misma dimensión en lugar de uno, pero cada uno de ellos con matrices mas sencillas](#), en un sistema sólo aparecerá la matriz  $B$  y en el otro la matriz  $C$ .

En el método de Crank-Nicolson (8.14), considerando que  $\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n = \mathbf{O}(k)$  se prescinde del último término de orden tres, queda:

$$(8.15) \quad \left(I - \frac{k}{2}B\right)\left(I - \frac{k}{2}C\right)\mathbf{U}^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}B\right)\left(I + \frac{k}{2}C\right)\mathbf{U}^n.$$

Para resolver este sistema implícito el [algoritmo de Peaceman-Rachford](#) utiliza:

$$(8.16) \quad \left(I - \frac{k}{2}B\right) \mathbf{V}^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}C\right) \mathbf{U}^n,$$

$$(8.17) \quad \left(I - \frac{k}{2}C\right) \mathbf{U}^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}B\right) \mathbf{V}^{n+1}.$$

El [algoritmo de D'Yakonov](#) es otro método A.D.I. habitual en la literatura:

$$(8.18) \quad \left(I - \frac{k}{2}B\right) \mathbf{V}^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}C\right) \left(I + \frac{k}{2}B\right) \mathbf{U}^n,$$

$$(8.19) \quad \left(I - \frac{k}{2}C\right) \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1}.$$

El la referencia [9] se pueden consulta más métodos de este tipo.

**8.2. Métodos de paso fraccionario.** Un método de paso fraccionario también denominado [splitting](#), es un algoritmo que sustituye procesos simultáneos por una sucesión de pasos para aumentar la eficacia. Los pasos pueden estar relacionados con las dimensiones espaciales del problema o con la naturaleza física de las diversas partes del problema.

En general, si una PDE contiene parte con distintas características, por ejemplo, los clásicos problemas de advección con difusión que combinan términos parabólicos e hiperbólicos, o también cuando las variables espaciales tienen escalas muy diferentes; utilizando esta técnica se pueden aplicar diferentes discretización a cada una de sus partes.

Quizá el ejemplo más sencillo de estos métodos es de las PDEs de evolución con dos variables espaciales  $x$  e  $y$ . Para la ecuación del calor en dos dimensiones (8.1), si  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son que las matrices que discretizan las derivadas en  $x$  e  $y$ , la solución exacta es

$$(8.20) \quad \mathbf{u}(t+k) = e^{k(\Lambda_1+\Lambda_2)} \mathbf{u}(t).$$

Suponiendo que la solución primero se difunde en la variable  $x$  y después en la variable  $y$  se tiene [dos ecuaciones de difusión en una sola variable](#)

$$(8.21) \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{xx}, \quad \text{con } \mathbf{v}(0) = \mathbf{u}(0),$$

$$(8.22) \quad \mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{yy}, \quad \text{con } \mathbf{w}(0) = \mathbf{v}(t),$$

cuya solución es

$$(8.23) \quad \mathbf{w}(t+k) = e^{k\Lambda_1} e^{k\Lambda_2} \mathbf{u}(t).$$

La diferencia ahora es que

$$(8.24) \quad e^{t\Lambda_1} e^{t\Lambda_2} - e^{t(\Lambda_1+\Lambda_2)} = \frac{1}{2}k^2(\Lambda_2\Lambda_1 - \Lambda_1\Lambda_2) + \mathbf{O}(k^3),$$

es decir, salvo que las matrices  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  conmuten, las soluciones  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  son diferentes, la diferencia es de orden  $k^2$ .

Para mejorar la aproximación, Strang propuso reemplazar la aproximación (8.24) por una de mayor orden que es

$$(8.25) \quad e^{k(\Lambda_1+\Lambda_2)} = e^{\frac{k}{2}\Lambda_1} e^{k\Lambda_2} e^{\frac{k}{2}\Lambda_1} + \mathbf{O}(k^3).$$

El método que resulta es

$$(8.26) \quad \mathbf{u}^*(t+k) = e^{\frac{k}{2}\Lambda_1} \mathbf{u}(t),$$

$$(8.27) \quad \mathbf{u}^{**}(t+k) = e^{k\Lambda_2} \mathbf{u}^*(t+k),$$

$$(8.28) \quad \mathbf{u}(t+k) = e^{\frac{k}{2}\Lambda_1} \mathbf{u}^{**}(t+k),$$

que son tres difusiones.

La referencia [6] es el tratamiento más completos para estas técnicas, aunque sólo considera ODE. En [1] y [2] las presentaciones son más breve pero aplicadas a PDE.

#### REFERENCIAS

1. Uri M. Ascher, *Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations*, SIAM, 2008.
2. J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover, 2001.
3. D.J. Higham and N.J. Higham, *MATLAB Guide*, SIAM, 2000.
4. F. John, *Partial Differential Equations*, Springer, 1982.
5. J.F. Mathews and K.D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB. Tercera edición*, Prentice Hall, 1999.
6. R.I. McLachlan and G.R.W. Quispel, *Splitting methos*, Acta Numerica (2002), 341–434.
7. R.D. Richtmeyer and K.W.Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems (Second Edition)*, John Wiley, 1967.
8. J.C. Strikwerda, *Finite Difference Squemes for P.D.E.*, Wadsworth, 1989.
9. E.H. Twizell, *Computational Methods for P.D.E.*, Ellis Horwood, 1984.
10. H.F. Weinberger, *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, Reverte, 1970.
11. W.Y.Yang, W.Cao, T.S.Chung, and J.Morris, *Applied Numerical Methods Using MATLAB*, Wiley Interscience, 2005.

DEP. MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA E I.O. DE LA UPV/EHU.

*E-mail address:* fernando.vadillo@ehu.es