INTRODUCCIÓN A LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE E.D.O.

F. VADILLO

Resumen. En este capítulo de introducción a los métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales ordinarias, primero se define el problema y se recuerda el teorema clásico de existencia y unicidad de solución, después se explican los métodos de derivación numérica muy brevemente con la extrapolación de Richardson. En la segunda parte, se presentan las ecuaciones en diferencias como herramienta para temas posteriores y finalmente se estudia el método de Euler que permite introducir los concepto que después se utilizan.

Índice

1. Problemas de valores iniciales

El problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria trata de hallar una función $y(t)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \tag{1.1}$$

junto con una condición inicial

$$y(t_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Geométricamente en cada punto del plano $(t, y(t))$ el valor $f(t, y(t))$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva solución $y(t)$ que en el instante t pasa por ese punto.

Received by the editors 3 de marzo de 2023.

La teoría clásica de las ecuaciones diferenciales demuestra el siguiente **Teorema de Picard** que garantiza la existencia y unicidad de solución para el problema (1.1)-(1.2).

Teorema 1.1. *Suponiendo que f y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas en un rectángulo $\mathcal{R} = \{(t, y) : a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$. Entonces para cualquier condición inicial $(t_0, y_0) \in \mathcal{R}$ existe un $h > 0$ tal que el problema de valores iniciales*

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0,$$

tiene una y sólo una solución en el intervalo $|t - t_0| \leq h$.

La demostración de este teorema consiste en demostrar que la iteración de Picard

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0, \\ y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds, \quad n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

converge a la solución única (vea por ejemplo los clásicos [9] ,[3]) o también [8] y [6]).

La hipótesis sobre la continuidad de $\partial f/\partial y$ se puede debilitar, en realidad bastaría con que f satisfaga una **condición de Lipschitz** en la variable y, es decir, exista una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{R}.$$

En muchos modelos matemáticos en lugar de las ecuaciones diferenciales de primer orden aparecen ecuaciones de orden mayor

$$y^{(d)}(t) = f(\ t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(d-1)}(t)), \tag{1.3}$$

con las condiciones iniciales

$$y^{(i)}(t_0) = \eta_i, \quad i = 0, 1, \cdots, d-1. \tag{1.4}$$

Este problema se re formula como un sistema de primer orden con las nuevas variables

$$\begin{cases} z_1(t) & = y(t), \\ z_2(t) & = y'(t), \\ \vdots & \vdots \\ z_d(t) & = y^{(d-1)}(t), \end{cases}$$

resultando el sistema de primer orden

$$\begin{cases} z_1'(t) & = z_2(t), \\ z_2'(t) & = z_3(t), \\ \vdots & \vdots \\ z_d'(t) & = f(\ t, z_1(t), z_2(t), \cdots, z_d(t)), \end{cases}$$

Ejemplo 1.2. En el problema del péndulo matemático, péndulo sin rozamiento, la ecuación que se tiene es

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + \sin\theta(t) = 0, \tag{1.5}$$

donde $\theta(t)$ el el ángulo que la cuerda forma con la vertical en el instante t. Cambiando a las variables $y_1(t) = \theta(t)$ e $y_2(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$ se tiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1(t) = y_2(t), \\ \frac{d}{dt}y_2(t) = -\sin y_1(t), \end{cases}$$

cuyo espacio de fase representamos en la figura 1.

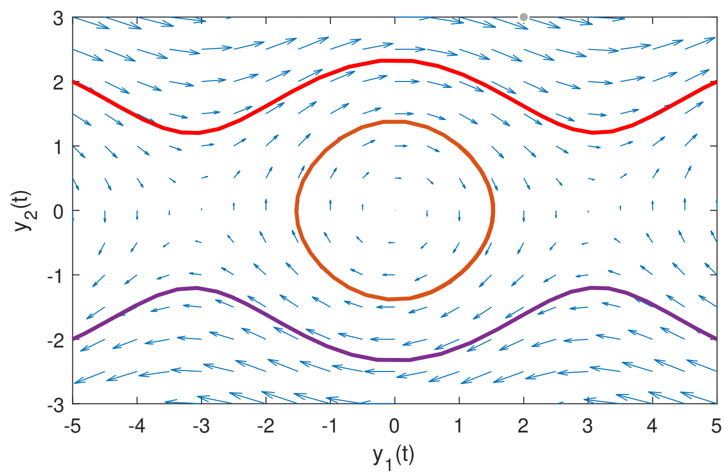

FIGURA 1. Espacio de fase del péndulo matemático.

Este ejemplo muestra como una ecuación de orden m siempre se puede reescribirla como un sistema m-dimensional de primer orden. Lo importante de reescribir la ecuación como un sistema de primer orden es que para sistema los resultados de las ecuaciones escalares son fáciles de extender. Naturalmente se deberán adaptar algunas cosas, por ejemplo en lugar de tomar valores absoluto se deberá escribir norma.

2. Operadores de Diferencias

La fórmulas de derivación numérica más sencillas utilizan diferencias finitas que se simplifican notablemente utilizando los operadores de diferencias que se presentan.

Suponiendo que la variable x la hemos discretizado en una red de puntos equidistantes con paso h, el operador de diferencias más sencillo es el llamado diferencias progresivas definido de la forma $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$, y aunque el valor del operador $\triangle$ cambia con el valor de h, sin embargo está dependencia no la explicitamos en la notación. Este operador se puede iterar dos veces $\triangle(\triangle f) = \triangle^2 f$ que denominamos diferencia progresiva segunda, y análogamente escribiremos $\triangle^3 f, \triangle^4 f, \ldots$

que serán las diferencias progresivas tercera, cuarta... Unos cálculos muy fáciles permiten expresar los operadores en función de los valores de la función

$$\begin{aligned}\triangle^2 f &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\\ \triangle^3 f &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x),\\ \ldots\ldots\end{aligned}$$

y en general

$$\triangle^n f = f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h)) + \ldots\ldots + (-1)^n \binom{n}{n} f(x). \tag{2.1}$$

Está fórmula muestra que el valor de $\triangle^n f$ en x sólo depende de los valores de f en los $n+1$ puntos, $x, x+h, .., x+nh$, pero nunca debe utilizarse porque es mucho mas eficaz calcular la tabla de diferencias (página 95 de [7]).

Además del operador $\triangle$ hay otros operadores de diferencias, los más frecuentes son:

- diferencias regresivas: $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$,
- diferencias centrales : $\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$,
- diferencias centrales de longitud 2h: $\triangle_0 f(x) = f(x+h) - f(x-h)$,

como veremos enseguida, ninguno de estos nuevos operadores son imprescindibles, por ejemplo $\nabla f(x) = \triangle f(x-h)$, pero a veces son más cómodos porque las expresiones son más sencillas. Además, si introducimos los operadores

- identidad: $If(x) = f(x)$,
- desplazamiento : $Ef(x) = f(x+h)$.

podemos definir las operaciones: suma, producto por escalares y composición, para operar entre ellos y obtener identidades, por ejemplo, es evidente que $\triangle = E - I$ por lo que $\triangle^n = (E-I)^n$ que demuestra la expresión (2.1).

3. Derivación numérica

El problema que ahora se considera es el de aproximar el valor de la derivada

$$\mathcal{D}(f) = f'(x^*), \tag{3.1}$$

de una función f en un punto x^* o también derivadas de orden mas alto

$$\mathcal{D}^2(f) = f''(x^*),\ \mathcal{D}^3(f) = f'''(x^*), \cdots \tag{3.2}$$

por varias razones, quizá no se conozca la expresión de f o esta sea demasiado complicada, de todas formas las aproximaciones numéricas de derivadas son esenciales para construir métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.

Para aproximar (3.1) se consideran fórmulas del tipo

$$\mathcal{D}_{N+1}(f) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j f(x_j), \tag{3.3}$$

donde los x_j son los nodos y las α_j los pesos. De la misma forma, para aproximar la segunda derivada

$$\mathcal{D}^2_{N+1}(f) = \sum_{j=0}^{N} \beta_j f(x_j). \tag{3.4}$$

Se dice una fórmula de derivación numérica tiene un grado de exactitud M, si es exacta para todos los polinomios de grados menor o igual que M y comete errores para al menos un polinomio de grado $M+1$.

Suponiendo fijados los nodos, para determinar los pesos α_j o β_j se pueden utilizar los tres métodos utilizados para la cuadratura:

1. Interpolación.
2. Desarrollos de Taylor.
3. Coeficientes indeterminado.

Ejemplo 3.1. Diferencia progresiva para la primera derivada

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^*+h)-f(x^*)}{h},$$

de grado de exactitud 1.

Ejemplo 3.2. Diferencia central para la primera derivada

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^*+h)-f(x^*-h)}{2h},$$

de grado de exactitud 2.

Ejemplo 3.3. Diferencia central para la segunda derivada

$$f''(x^*) \approx \frac{f(x^*+h)-2f(x^*)+f(x^*-h)}{h^2},$$

de grado de exactitud 3.

El error de la derivada numérica se estima simplemente usando desarrollos de Taylor con los siguientes resultados de los ejemplos anteriores:

Ejemplo 3.4. Estimaciones de los errores

$$\begin{aligned}
\text{Progesiva primera derivada:} \quad \mathcal{E}(f) &= -\frac{h}{2}f''(\xi),\\
\text{Central primera derivada :} \quad \mathcal{E}(f) &= -\frac{h^2}{12}(f'''(\xi)+f'''(\xi')),\\
\text{Central segunda derivada:} \quad \mathcal{E}(f) &= -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

con la función f suficientemente regular.

La derivación numérica es un problema que puede tener serias dificultades. Considere por ejemplo una función f con valores absolutos del orden de 1, la nueva función $g(x)=f(x)+10^{-12}\sin(10^{18}x)$ toma valores muy parecidos pero su derivada en cero $g'(0)=f'(0)+10^6$ y evidentemente estas cantidades no la detectara cualquier diferencia divididas, es decir, se tiene un problema mal puesto.

4. Extrapolación de Richardson

La idea básica propuesta por Richardson en 1911 en el contexto de las diferencia finitas es aplicable en muchos contextos de forma siguiente.

Se supone que para aproximar un valor f_0 se dispone de algún método de aproximación de orden p, es decir

$$f(h) \;=\; f_0 + h^p f_p + O(h^{p+1}), \tag{4.1}$$

que aplicado ahora con paso $2h$ resulta

$$f(2h) \;=\; f_0 + 2^p h^p f_p + O(h^{p+1}), \tag{4.2}$$

multiplicando (4.1) por 2^p y restando la (4.2) resulta

$$2^p f(h) - f(2h) \;=\; (2^p - 1) f_0 + O(h^{p+1}),$$

por lo que se obtiene una nueva aproximación de orden $p+1$

$$\frac{2^p f(h) - f(2h)}{2^p - 1} \;=\; f_0 \;+\; O(h^{p+1}).$$

Está metodología permite alcanza el orden que uno quiera en casi cualquier contexto, por ejemplo, la extrapolación de Richardson aplicada a la regla de los trapecios compuesta se denomina cuadratura de Romberg que aparece en muchas referencias como por ejemplo [1, pp. 471], [10, pp. 228], [2, pp. 262] , [4, pp. 138] y [5, pp. 252]

5. Ecuaciones en diferencias

En esta sección se tratará de sucesiones de números complejos $u_0, u_1, u_2, \cdots$ que se escribe de la forma $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ o de forma más abreviada $\{u_n\}$ o también $\mathbf{u}$. El espacio vectorial con las operaciones y suma por un escalar de todas las sucesiones de números complejos

$$\{u_n\} + \{v_n\} \;=\; \{u_n + v_n\}, \qquad \alpha\{u_n\} \;=\; \{\alpha\, u_n\}$$

se denotará como $\mathcal{S}$.

Una ecuación en diferencias

$$\begin{aligned}
\text{Primer orden:} \qquad & u_{n+1} \;=\; F(u_n, n),\\
\text{Segundo orden:} \qquad & u_{n+2} \;=\; G(u_{n+1}, u_n, n),\\
\text{Tercer orden:} \qquad & u_{n+3} \;=\; H(u_{n+2}, u_{n+1}, u_n, n),\\
\text{......} \qquad &
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1. Si $F(\alpha,\beta) = (\beta+1)\,\alpha$ entonces $u_{n+1} = (n+1)\,u_n$ cuya solución es sucesión $\{n!\}$ o también $\{2\,n!\}$ ...

Para una ecuación en diferencias existen infinitas soluciones y para tener una única solución se necesitan tantos valores iniciales como su orden indica, se tiene un problema de valores iniciales.

5.1. Ecuaciones en diferencias lineales. Una ecuación en diferencias lineal de orden k es una expresión del tipo

$$a_k(n)\ u_{n+k} + a_{k-1}(n)\ u_{n+k-1} + \cdots + a_0(n)\ u_n \ = \ c(n), \tag{5.1}$$

donde se supone que $\forall n,\ a_k(n) \cdot a_0(n) \neq 0$. Si los coeficiente no dependen del índice n entonces es una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes.

Ejemplo 5.2. La ecuación $u_{n+1} - u_n \ = \ 1$ tiene la solución $\{n\}$ aunque también lo es $\{n+1\}$ o la $\{n+\pi\}$ ...

En general, para conseguir una única solución de (5.1) se deben conocer k condiciones iniciales

$$u_0 = \eta_0,\ u_1 = \eta_1, \cdots,\ u_{k-1} = \eta_{k-1}, \tag{5.2}$$

y suponiendo que $a_k(n) \neq 0$ se despeja

$$u_{n+k} \ = \ -\frac{1}{a_k(n)}\left[\ a_{k-1}(n)\ u_{n+k-1} + \cdots + a_0(n)\ u_n\ \right] + \ \frac{c(n)}{a_k(n)},$$

por lo que el problema (5.1)-(5.2) tiene solución única.

En términos de operados, se define

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}:\ \mathcal{S} & \to & \mathcal{S} \\ \{u_n\} & \to & \{a_k(n)\ u_{n+k} + a_{k-1}(n)\ u_{n+k-1} + \cdots + a_0(n)\ u_n\} \end{array}$$

y la ecuación (5.1) se escribe

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) \ = \ \mathbf{c}. \tag{5.3}$$

Su ecuación homogénea asociada es

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) \ = \ \mathbf{0}. \tag{5.4}$$

Teorema 5.3. *Si* $(\mathbf{z}^{(\alpha)})_{\alpha \in A}$ *una familia de soluciones de* (5.4), *entonces es una familia libre ssi la familia de vectores* $(\ z_0^{(\alpha)}, \cdots, z_{k-1}^{(\alpha)}\ )^T_{\alpha \in A}$ *son linealmente independientes en* $\mathbb{C}^n$.

Demostración. Ejercicio □

De esta forma se concluye que el espacios de soluciones de (5.4) es n dimensional y para construirlo se necesitan k soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{z}^{(1)}, \cdots, \mathbf{z}^{(k)}.$$

que se denominan sistema fundamental de soluciones.

Por otra parte, por la linealidad del problema, la solución general de la ecuación completa (5.3) sera

$$\mathbf{u} \ = \ \mathbf{u}_h \ + \ \mathbf{u}_p,$$

donde $\mathbf{u}_h$ representa la solución general de la homogénea asociada (5.4) y $\mathbf{u}_p$ es una solución particular de la completa (5.3).

5.2. Ecuaciones de coeficientes constantes homogénea. Ahora se tiene la ecuación

$$a_k\ u_{n+k} + a_{k-1}\ u_{n+k-1} + \cdots + a_0\ u_n \ = \ 0, \tag{5.5}$$

y se buscan soluciones del tipo $u_n = \{r^n\}$ con $r \neq 0$, por lo cual

$$a_k\ r^{n+k} + a_{k-1}\ r^{n+k-1} + \cdots + a_0\ r^k \ = \ 0,$$

es decir, r debe ser raíz del polinomio característico

$$P(r) \ = \ a_k\ r^k + a_{k-1}\ r^{k-1} + \cdots + a_0.$$

Por tanto, si $r_1, \cdots, r_k$ son $k \leq n$ raíces diferentes de $P(r)$ cuando aplicamos el teorema anterior se tiene un determinante de Vandermonde y las soluciones $\{r_1^n\}, \cdots, \{r_k^n\}$ son linealmente independientes. Es decir, si $P(r)$ tiene todas las raíces diferentes, entonces la solución general de (5.5) es

$$u_n \ = \ d_1\ r_1^n + \cdots + d_k\ r_k^n,$$

donde las constantes $d_1, \cdots, d_k$ se ajustan con las condiciones iniciales (5.2).

Teorema 5.4. *Si el polinomio $P(r)$ tiene una raíz ξ de multiplicidad $m+1$ entonces la familia de sucesiones*

$$\{\xi^n\}, \{n\ \xi^{n-1}\}, \cdots, \{n(n-1)\cdots(n-m+1)\xi^{n-m}\},$$

son soluciones de (5.5) *linealmente independientes.*

Demostración. Ejercicio □

5.3. Ecuaciones de coeficientes constantes no homogénea. Se tiene la ecuación en diferencias

$$a_k\ u_{n+k} + a_{k-1}\ u_{n+k-1} + \cdots + a_0\ u_n \ = \ c_n, \tag{5.6}$$

cuya solución general es la suma de la solución general de ecuación homogénea asociada, mas una solución particular de la completa que se puede hallar fácilmente en algunas ocasiones.

Por ejemplo, si $c_n = c$ y la suma $\sum a_j \neq 0$, una solución trivial es $u_n = \frac{c}{\sum a_j}$.

Otro caso sencillo es cuando $c_n = d^n p(n)$ donde d es una constante y $p(n)$ un polinomio como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.5. Calcule la solución general de la ecuación

$$u_{n+2} \ - \ 5\ u_{n+1} \ + \ 6\ u_n \ = \ 5^n \cdot n.$$

La solución de la parte homogénea es

$$u_h \ = \ c_1\ 2^n \ + \ c_2\ 3^n,$$

y el tipo de solución particular es $u_p = 5^n(r_1 n + r_0)$ con el resultado

$$u \ = \ c_1\ 2^n \ + \ c_2\ 3^n \ + \ 5^n \left(\frac{5}{6}\ n - \frac{95}{36}\right).$$

Una forma general de calcular soluciones particular es el siguiente teorema:

Teorema 5.6. *Sea $\{v_n\}$ la solución de la parte homogénea con las condiciones iniciales*

$$v_0 = v_1 \cdots = v_{k-2} = 0, \quad v_{k-1} = 1.$$

Entonces para $n \geq 0$ la sucesión

$$u_n = \frac{1}{a_k} \sum_{j=0}^{n-k} c_j \, v_{n-j-1},$$

es una solución particular de la ecuación completa (5.6).

Demostración. Ejercicio □

6. El método de Euler

El método numérico mas sencillo para aproximar soluciones del problema de valores iniciales (1.1)-(1.2) es el método de Euler. Discretizando la variables independiente t en una red de puntos equidistante $t_n = t_0 + nh$ se construye la iteración

$$y_{n+1} = y_n + h \, f(t_n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.1}$$

tal que $y_n \approx y(t_n)$, es decir, los error $e_n = y(t_n) - y_n$ se puedan hacer tan pequeños como se quiera tomando el paso h suficientemente pequeño

$$\lim_{h \to 0} y_n = y(t),$$

con $n \to \infty, h \to 0, t_n = t_0 + nh = t \in [t_0, T]$ fijado. Es decir, el método sea convergente.

Lema 6.1. *Lema de Gronwall discreto Suponiendo que existen dos constantes $A > 0$ y $B \geq 0$ tales que la sucesión $\{u_n\}$ verifica la relación*

$$|u_{n+1}| \leq (1 + A) \, |u_n| + B, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

entonces

$$|u_n| \leq e^{nA} |u_0| + \frac{e^{nA} - 1}{A} \, B.$$

Demostración. Notas de clase. □

Teorema 6.2. *Teorema de convergencia del método de Euler Suponiendo que la función f del problema* (1.1) *en continua en t y Lipschitziana en y, el método de Euler es convergente siempre que condición inicial también converja.*

Demostración. Para simplificar la demostración se supone que $f \in \mathcal{C}^1$ y por tanto $y \in \mathcal{C}^2$, entonces

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n), \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}],$$

restando (6.1) a esta ecuación queda

$$e_{n+1} = e_n + h\Big(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n) \Big) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n),$$

por lo que

$$|e_{n+1}| \leq \big(1 + Lh\big) \, |e_n| + \frac{h^2}{2} C_2,$$

aplicando el lema anterior se concluye

$$|e_{n+1}| \;\leq\; e^{(T-t_0)L}|e_0| + \frac{h}{2}\,\frac{e^{(T-t_0)L}-1}{L}\;C_2,$$

y la convergencia de orden uno. $\square$

Además de la convergencia los métodos numéricos deben ser estable en el sentido de que no amplifiquen los errores, el lo que se conoce como estabilidad absoluta.

Definicion 6.3. Se dice que un método es absolutamente estable si una perturbación δ en y_n no se amplifica para los siguientes y_m con $m > n$.

Evidentemente esta propagación depende del problema, en la práctica se toma el problema lineal $y' = \lambda\, y$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ y se define la región de estabilidad absoluta como el conjunto de los $\overline{h} = \lambda h$ la amplificación de los errores está acotada. Por ejemplo, para Euler

$$y_{n+1} \;=\; y_n + \lambda h\; y_n \;=\; (1+\lambda h)\; y_n,$$

por lo que la estabilidad absoluta será cuando $|1+\lambda h| \leq 1$, que en el plano complejo $\overline{h} = \lambda h$ es el círculo de centro $(-1, 0)$ y radio 1. Para los problemas nolineales se estudian las condiciones de estabilidad del problema linealizado.

Ejemplo 6.4. Se considera el problema

$$y'(t) \;=\; -1000(y-t^2)+2t, \quad y(0) \;=\; 0,$$

de solución exacta $y(t) = t^2$. El problema linealizado es $y' = -1000y$, es decir $\lambda = -1000$ luego la condición de estabilidad es: $-2 \leq -1000\; h$ es decir $h \leq 1/500$. Este resultado está confirmado en la tabla adjunta

Cuadro 1. Resultados del método de Euler

h	n	y_n
1/100	100	-8.9998e+89
1/200	200	-1.1279e+115
1/400	400	-2.4086e+65
1/500	500	1.0000

Referencias

1. U.M. Ascher and C. Greif, *A Firts Course in Numerical Methods*, SIAM, 2011.
2. K.E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1978.
3. W.E. Boyce and R.C. DiPrima, *Elementaru Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, 2001.
4. R. Bulirsch and J. Stoer, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 1980.
5. G. Miller, *Numerical Analysis for Engineers and Scientists*, Cambridge University Press, 2014.
6. A.D. Polyanin and V.F. Zitsev, *Handbook of Ordinary Differential Equations Exact Solutions, Methods, and Problems*, CRC Press, 2018.
7. J.M. Sanz-Serna, *Diez lecciones de Cálculo Numérico*, Universidad de Valladolid, 2010.
8. B.J. Schroers, *Ordinadry Differenctial Equations. A Practical Guide*, Cambridge University Press, 2011.
9. G.F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, 1993.
10. W.Y. Yang, W. Cao, T.S. Chung, and J. Morris, *Applied Numerical Methods Using* MATLAB, Wiley Interscience, 2005.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UPV/EHU
Email address: `fernando.vadillo@ehu.eus`