

# MÉTODOS DE UN PASO. MÉTODOS RUNGE-KUTTA

F. VADILLO

RESUMEN. En este documento se presentan los métodos de un paso para resolver numéricamente problemas de valores iniciales de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Después de estudiar la teoría de la convergencia de los métodos de un paso explícitos, se construyen y estudian los métodos clásicos de Runge-Kutta. Más tarde, se exponen las dos técnicas de estimación de errores: extrapolación de Richardson y la más importante de los pares encajados conocidos como métodos de Runge-Kutt-Fehlberg. Finalmente, se estudian sus propiedades de estabilidad absoluta.

## ÍNDICE

1. Métodos de un paso explícitos	1
2. Métodos Runge-Kutta clásicos	3
2.1. Método Runge-Kutta de una etapa	4
2.2. Método Runge-Kutta de dos etapas	4
2.3. Método Runge-Kutta de tres etapas	5
3. Estimativos del error	6
3.1. Extrapolación de Richardson	6
3.2. Métodos de Runge-Kutta Fehlberg (RKF)	7
4. Teoría de la estabilidad absoluta	8
5. Métodos Runge-Kutta implícitos	9
Referencias	10

## 1. MÉTODOS DE UN PASO EXPLÍCITOS

Dado un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), & t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

se define un paso  $h = \frac{T-t_0}{N}$ , se construye una red de punto equidistante  $t_n = t_0 + nh$  y se consideran ecuaciones discretas de la forma

$$(1.2) \quad y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n; h), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

donde  $\Phi$  es la función incremento del método que se supone continua en un dominio  $\mathcal{D} = [t_0, T] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$ .

---

Received by the editors 17 de marzo de 2023.

**Definición 1.1. Error de truncatura local** Del método (1.2) para el problema (1.1) en  $t_{n+1}$  al valor

$$d_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \Phi(t_n, y(t_n); h).$$

Es decir, el error que comete la solución exacta en el método numérico, o también el error del método suponiendo que en  $t_n$  la solución fuera exacta.

**Definición 1.2. Consistencia** Se dice que el método (1.2) es consistente con el problema (1.1) si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{|d_{n+1}|}{h} \right) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad d_{n+1} = \mathbf{o}(h).$$

**Definición 1.3. Cero estabilidad** Se dice que el método (1.2) es cero-estable si dadas dos sucesiones  $\{y_n\}, \{z_n\}$  tales que

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n; h), & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ y_0, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h (\Phi(t_n, z_n; h) + \varepsilon_n), & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ z_0, \end{cases}$$

existen constantes  $M_1, M_2$  tales que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - z_n| \leq M_1 |y_0 - z_0| + M_2 \max_{0 \leq n \leq N-1} |\varepsilon_n|.$$

**Definición 1.4. Error de truncatura global** en el punto  $t_n$  es  $e_n = y(t_n) - y_n$ .

**Definición 1.5. Convergencia** Se dice que el método (1.2) es convergente para el problema (1.1) si

$$\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| = \mathbf{o}(1) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |e_n| = 0.$$

**Teorema 1.6. Teorema de convergencia** Si el método numérico (1.2) es cero-estable y consistente con el problema (1.1), entonces es convergente.

*Demostración.* Ver notas de clase □

Es decir:

$$\text{Consistencia} + \text{Cero-estabilidad} \Rightarrow \text{Convergencia.}$$

**Teorema 1.7. Condición necesaria y suficiente para la consistencia** Una condición necesaria y suficiente para la consistencia del método (1.2) con el problema (1.1) es que

$$\Phi(t, y(t); 0) = f(t, y(t)) \quad \text{para todo } t \in [t_0, T].$$

*Demostración.* Ver notas de clase □

**Teorema 1.8. Condición suficiente para la cero-estabilidad** Si la función incremento del método es Lipschitzian en  $y$ , es decir

$$|\Phi(t, y; h) - \Phi(t, z; h)| \leq M |y - z|,$$

para todo  $(t, y; h), (t, z; h) \in \mathcal{D}$ , entonces el método (1.2) es cero-estable.

*Demostración.* Ver notas de clase □

**Teorema 1.9. Teorema de equivalencia** Si la función incremento del método  $\Phi$  es Lipschitziana en  $y$ , entonces

*Consistente*  $\Leftrightarrow$  *Convergente*

*Demostración.* Ver notas de clase □

**Definición 1.10. Orden de un método** Se dice que el método (1.2) es de orden  $p \in \mathbb{Z}^+$  para el problema (1.1) si

$$d_{n+1} = \mathbf{O}(h^{p+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Y se dice simplemente que el método (1.2) es de orden  $p$  si lo es para todo problema (1.1) con  $f$  suficientemente regular.

**Teorema 1.11. Caracterización del orden** Si las derivadas parciales  $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial h}, \dots, \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}$  son continuas en el dominio  $\mathcal{D}$  con  $f$  suficientemente regular, entonces una condición necesario y suficiente para que (1.2) sea de orden  $p$  es que

$$\frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t, y; 0) = \frac{1}{k+1} f^{(k)}(t, y), \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad (t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Ver notas de clase □

## 2. MÉTODOS RUNGE-KUTTA CLÁSICOS

Los métodos Runge-Kutta son la clase más importante de los métodos de un paso para aproximar e.d.o. La expresión general de un método Runge-Kutta de  $R$ -evaluaciones es

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n; h), \\ \Phi(t, y; h) = \sum_{r=1}^R c_r k_r, \\ k_1 = f(t, y), \\ k_r = f\left(t + ha_r, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right), \quad r = 2, 3, \dots, R, \\ a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad r = 2, 3, \dots, R. \end{array} \right.$$

Un método de Runge-Kutta utiliza  $R$  evaluaciones de la función  $f$  que son las derivadas de la solución  $y(t)$  en varios puntos y después en  $\Phi$  hace una media

ponderada por lo que se necesita que  $\sum_{r=1}^R c_r = 1$ .

Para construir estos métodos se utiliza la siguiente notación:

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_{tt} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad f_{ty} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}, \dots$$

y además

$$F = f_t + f f_y, \quad G = f_{tt} + 2f f_{ty} + f^2 f_{yy}.$$

Con esta notación el desarrollo de  $\Phi_T$  del método de Taylor quedaría

$$(2.2) \quad \Phi_T(t, y; h) = f + \frac{1}{2}hF + \frac{1}{6}h^2(Ff_y + G) + \mathbf{O}(h^3).$$

Para construir los primeros métodos de Runge-Kutta se consideran los métodos (2.1) para  $R = 3$ , es decir

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, y) = f, \\ k_2 &= f(t + a_2h, y + ha_2k_1) \\ k_3 &= f(t + a_3h, y + h((a_3 - b_{32})k_1 + b_{32}k_2)), \end{aligned}$$

y utilizando desarrollos de Taylor

$$\begin{aligned} k_2 &= f + a_2hF + \frac{1}{2}a_2^2h^2G + \mathbf{O}(h^3), \\ k_3 &= f + a_3hF + h^2(a_2b_{32}Ff_y + \frac{1}{2}a_3^3G) + \mathbf{O}(h^3), \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Phi(t, y; h) &= (c_1 + c_2 + c_3)f + h(c_2a_2 + c_3a_3)F \\ &+ \frac{1}{2}h^2(2c_3a_2b_{32}Ff_y + (c_2a_2^2 + c_3a_3^2)G) + \mathbf{O}(h^3). \end{aligned}$$

**2.1. Método Runge-Kutta de una etapa.** Es decir,  $R = 1$  por lo que  $c_2 = c_3 = 0$  quedando la función incremento

$$(2.4) \quad \Phi(t, y; h) = c_1f + \mathbf{O}(h^3),$$

que comparada con el desarrollo de Taylor (2.2) dará un método de orden uno cuando  $c_1 = 1$  que es el conocido método de Euler.

**2.2. Método Runge-Kutta de dos etapas.** Es decir,  $R = 2$  y entonces  $c_3 = 0$ . La función incremento es

$$(2.5) \quad \Phi(t, y; h) = (c_1 + c_2)f + hc_2a_2F + \frac{1}{2}h^2c_2a_2^2G + \mathbf{O}(h^3).$$

que tendrá orden dos cuando

$$(2.6) \quad c_1 + c_2 = 1, \quad c_2a_2 = \frac{1}{2}.$$

En particular, cuando  $c_1 = 0, c_2 = 1$  y  $a_2 = \frac{1}{2}$  se tiene el **método de Euler modificado**:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)\right).$$

Cuando  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  y  $a_2 = 1$  se tiene el **método de Euler mejorado**:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(t_n, y_n) + f\left(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)\right)\right].$$

**2.3. Método Runge-Kutta de tres etapas.** Con tres etapas y operando de forma parecida se obtienen las condiciones de orden tres resultan las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\c_2 a_2 + c_3 a_3 &= \frac{1}{2}, \\c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 &= \frac{1}{3}, \\c_3 a_2 b_{32} &= \frac{1}{6},\end{aligned}$$

y seis indeterminadas o incógnitas.

Los métodos de Runge-Kutta de tres etapas y orden tres son dos:

**La fórmula de Heun**

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3), \\k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1\right), \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2\right),\end{aligned}$$

**La fórmula de Kutta de orden tres**

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \\k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2),\end{aligned}$$

Para conseguir métodos Runge-Kutta de tercer orden es necesario utilizar al menos cuatro etapas  $R = 4$  y con unos tediosos cálculos se construye el más famoso **método Runge-Kutta de orden cuatro**

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3).\end{aligned}$$

En la bibliografía especializada [7], [6] y [4] se pueden consultar otros métodos Runge-Kutta. Aunque podría parecer por los ejemplos anteriores que con  $R$  etapas se alcanza orden  $R$ , esto no es cierto, en general utilizando la teoría algebraica de

Butcher se demuestra que si  $p(R)$  es el máximo orden alcanzado con  $R$  etapas, entonces

$$\begin{aligned} p(R) &= R, & \text{para } R = 1, 2, 3, 4, \\ p(R) &= R - 1, & \text{para } R = 5, 6, 7, \\ p(R) &= R - 2, & \text{para } R = 8, 9, \\ p(R) &\leq R - 2, & \text{para } R \geq 10. \end{aligned}$$

En los métodos de un paso el error de truncatura local

$$T_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \Phi(t_n, y(t_n); h),$$

coincide con el error global  $e_{n+1}$  suponiendo que no existen error anterior, es decir,  $y_n = y(t_n)$ . Suponiendo suficiente regularidad la función  $f(t, y)$ , dicho error se puede escribir de la form

$$(2.7) \quad T_{n+1} = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t_n) + \mathbf{O}(h^{p+2}),$$

donde  $C_{p+1}$  es la **constante de error** del método de orden  $p$ . En otras ocasiones estos errores se escribir de la forma

$$(2.8) \quad T_{n+1} = \Psi(t_n, y(t_n)) h^{p+1} + \mathbf{O}(h^{p+2}),$$

donde  $\Psi$  es la **función de error principal**.

En general los coeficientes de un método Runge-Kutta se representan en forma de Tabla llamada **Matriz de Butcher** de la forma

$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1R} \\ a_2 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_R & b_{R1} & b_{R2} & \cdots & b_{RR} \\ \hline & c_1 & c_2 & \cdots & c_R \end{array}$$

Evidentemente, los métodos de Runge-Kutta explícitos tiene una matriz de Butcher estrictamente triangular inferior.

### 3. ESTIMATIVOS DEL ERROR

Desde el punto de vista práctico, para implementar eficazmente los métodos Runge-Kutta se necesita alguna técnica para estimar los errores cometidos y ajustar la longitud del paso si fuera necesario. Existen tres maneras de estimar dichos errores que se comentan en lo siguiente.

**3.1. Extrapolación de Richardson.** Consiste simplemente en utilizar la técnica general de Richardson (vea por ejemplo [6], [1], [9], [2], [3] y [8]) para estimar la función de error principal en (2.8).

Suponiendo calculada la aproximación  $y_{n+1}$  sin errores previos,

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \Psi(t_n, y(t_n)) h^{p+1} + \mathbf{O}(h^{p+2}),$$

y si además se usa el mismo método con paso  $2h$  para obtener  $y_{n+1}^*$  tal que

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1}^* &= \Psi(t_{n-1}, y(t_{n-1})) (2h)^{p+1} + \mathbf{O}(h^{p+2}) \\ &= \Psi(t_n, y(t_n)) (2h)^{p+1} + \mathbf{O}(h^{p+2}), \end{aligned}$$

restando ambas igualdades queda

$$y_{n+1} - y_{n+1}^* = (2^{p+1} - 1) \Psi(t_n, y(t_n)) h^{p+1} + \mathbf{O}(h^{p+2}),$$

y finalmente se consigue la estimación del error

$$\Psi(t_n, y(t_n)) h^{p+1} \approx \frac{y_{n+1} - y_{n+1}^*}{2^{p+1} - 1}.$$

**3.2. Métodos de Runge-Kutta Fehlberg (RKF).** Esta técnica denominada de pares encajados utiliza dos métodos Runge-Kutta de ordenes  $p$  y  $p+1$  tales que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \Phi_1(t_n, y_n; h), \\ \bar{y}_{n+1} &= \bar{y}_n + h \Phi_2(t_n, \bar{y}_n; h), \end{aligned}$$

de forma que compartan las mismas evaluaciones  $k_r$ , es decir

$$k_r = f \left( t + ha_r, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s \right),$$

$$\Phi_1(t, y; h) = \sum_{r=1}^{R_1} c_r k_r,$$

$$\Phi_2(t, y; h) = \sum_{r=1}^{R_2} \bar{c}_r k_r,$$

habitualmente  $R_2 = R_1 + 1$ .

Suponiendo que  $y_n = y(t_n)$  se tiene los errores locales

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1} &= \Psi_1(t_n, y(t_n)) h^{p+1} + \mathbf{O}(h^{p+2}), \\ y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} &= \Psi_2(t_n, y(t_n)) h^{p+2} + \mathbf{O}(h^{p+3}), \end{aligned}$$

que restando dan

$$\bar{y}_{n+1} - y_{n+1} = \Psi_1(t_n, y(t_n)) h^{p+1} + \mathbf{O}(h^{p+2}),$$

una aproximación de la función de error principal del método de orden más bajo  $p$

$$(3.1) \quad \Psi_1(t_n, y(t_n)) \approx \frac{\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}}{h^{p+1}}.$$

Esta estimación ahora se usa de la siguiente manera: se supone que el paso utilizado sea tal que dicha estimación de error sea menor o igual que una tolerancia pequeña  $\epsilon$ , es decir,

$$|\Psi_1(t_n, y(t_n))| h^{p+1} \leq \epsilon.$$

Para el siguiente paso de  $t_{n+1}$  a  $t_{n+2}$  el nuevo paso  $h_{new}$  debe verificar

$$|\Psi_1(t_{n+1}, y(t_{n+1}))| h_{new}^{p+1} \leq \epsilon,$$

y como

$$|\Psi_1(t_{n+1}, y(t_{n+1}))| = |\Psi_1(t_n, y(t_n))| + \mathbf{O}(h),$$

se usa la estimación (3.1) para obtener

$$\frac{|\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}|}{h^{p+1}} h_{new}^{p+1} \leq \epsilon,$$

de donde se decide que el paso siguiente sera

$$h_{new} \leq h \cdot \sqrt[p+1]{\frac{\epsilon}{|\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}|}}.$$

Los ejemplos más conocidos de métodos RKF son los pares de orden 2(3) y 4(5) que se puede consultar en [6, pp. 170]. El más sencillo es el RKF2(3) de dos y tres etapas

0		
1	1	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

aunque el más conocido es el RKF45 de orden 4 y 5 con 5 y 6 etapas

0					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{25}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4101}$	$-\frac{11}{40}$
	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$
	$\frac{15}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$
					$\frac{2}{55}$

#### 4. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD ABSOLUTA

Para estudiar la estabilidad absoluta de un método Runge-Kutta se aplica a la ecuación lineal  $y' = \lambda y$  y se buscan los  $\bar{h} = \lambda h$  en el plano complejo para los cuales  $\frac{y_{n+1}}{y_n}$  se mantiene acotado. Por ejemplo, para un método con tres etapas ( $R = 3$ )

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda y, \\ k_2 &= \lambda y (1 + a_2 h \lambda), \\ k_3 &= \lambda y (1 + a_3 h \lambda + a_2 b_{32} \lambda^2 h^2), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Phi(t, y; h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 \\ &= \lambda [(c_1 + c_2 + c_3) + (c_2 a_2 + c_3 a_3) \lambda h + c_3 a_2 b_{32} \lambda^2 h^2] y, \end{aligned}$$



y el método queda

$$y_{n+1} = y_n + \bar{h} \left[ (c_1 + c_2 + c_3) + (c_2 a_2 + c_3 a_3) \bar{h} + c_3 a_2 b_{32} \bar{h}^2 \right] y_n,$$

con  $\bar{h} = \lambda h$ , por lo que

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \left[ (c_1 + c_2 + c_3) \bar{h} + (c_2 a_2 + c_3 a_3) \bar{h}^2 + c_3 a_2 b_{32} \bar{h}^3 \right] = r.$$

La solución de esta ecuación en diferencias es  $y_n = d r^n$  donde  $d$  es una constante arbitraria. Entonces la región de estabilidad absoluta serán los  $\bar{h}$  en el plano complejo para los que  $|r| < 1$  y cuando  $\lambda$  sea real se tendrá el intervalo de estabilidad absoluta.

Lo primero que se observa es que para que el método sea de consistente se necesita que  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$  y por tanto

$$r = 1 + \bar{h} + \mathbf{O}(h^2),$$

y por tanto **para  $0 < \bar{h} \ll 1$  todo método consistente es absolutamente inestable.**

Si el método Runge-Kutta tiene orden tres, entonces

$$r = 1 + \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^2 + \frac{1}{6} \bar{h}^3 + \mathbf{O}(h^4),$$

por lo que todos los métodos de tres etapas y orden tres tiene la misma región de estabilidad absoluta.

Idéntico análisis se puede aplicar para  $R = 1, 2, 3, 4$  evaluaciones con el siguiente resultado

Método	$r$	Intervalo
$R_1$	$1 + \bar{h}$	$(-2, 0)$
$R_2$	$1 + \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^2$	$(-2, 0)$
$R_3$	$1 + \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^2 + \frac{1}{6} \bar{h}^3$	$(-2, 51, 0)$
$R_4$	$1 + \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^2 + \frac{1}{6} \bar{h}^3 + \frac{1}{24} \bar{h}^4$	$(-2, 78, 0)$

e

En la figura 4 se han dibujado las regiones de estabilidad absoluta de los métodos Runge-Kutta para  $R = 1, 2, 3, 4$ .

## 5. MÉTODOS RUNGE-KUTTA IMPLÍCITOS

En los métodos de Runge-Kutta implícitos el  $k_r$  depende no sólo de los  $k_s$  anteriores sino de todos ellos, es decir

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n; h), \\ \Phi(t_n, y_n; h) = \sum_{r=1}^R c_r k_r, \\ k_r = f \left( t + h a_r, y + h \sum_{s=1}^R b_{rs} k_s \right), \quad r = 1, 2, \dots, R, \\ a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad r = 2, 3, \dots, R. \end{array} \right.$$

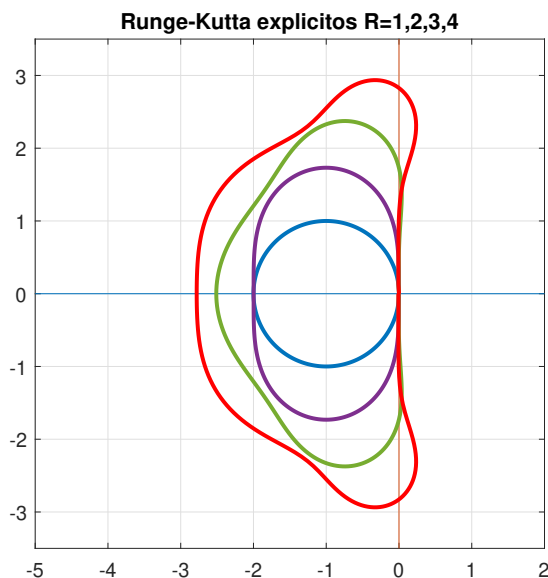


FIGURA 1. Regiones de estabilidad absoluta de los métodos Runge-Kutta para  $R = 1, 2, 3, 4$ .

y por tanto su matriz de Butcher será densa.

Evidentemente estos métodos necesitan resolver el sistema implícitos de las  $k_r$ , lo que complica y encarece su aplicaciones, en [7, pag. 149] se construye con  $R = 2$  un método de orden cuatro: método de Hammer-Hollingswort y se analiza su estabilidad absoluta. La conclusión es que a pesar de mejora el orden y la estabilidad, su elevado coste computacional sólo lo hace competitivo en problemas con graves dificultades de estabilidad numérica, vea por ejemplo [4], [6] o [5].

#### REFERENCIAS

1. U.M. Ascher and C. Greif, *A Firts Course in Numerical Methods*, SIAM, 2011.
2. K.E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1978.
3. R. Bulirsch and J. Stoer, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 1980.
4. J.C. Butcher, *Numerical Methods for O.D.E. Second Edition*, Wiley, 2003.
5. D.F. Griffiths and D.J. Higham, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Initial Value Problems*, Springer, 2010.
6. E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer, 1987.
7. J.D. Lambert, *Numerical Methods for O.D.E. The Initial Value Problems*, Wiley, 1991.
8. G. Miller, *Numerical Analysis for Engineers and Scientists*, Cambridge University Press, 2014.
9. W.Y. Yang, W. Cao, T.S. Chung, and J. Morris, *Applied Numerical Methods Using MATLAB*, Wiley Interscience, 2005.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UPV/EHU  
 Email address: fernando.vadillo@ehu.es