

UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS STIFF

F. VADILLO

RESUMEN. Esta última lección del curso de introducción a la resolución numérica de E.D.O. se dedica a explicar los problemas stiff y algunos métodos numéricos para ellos. Evidentemente esta es una muy breve incursión en este tópico que tiene su mejor y más completa referencia en [3]. En la segunda parte se describe brevemente el método de líneas para simular ecuaciones en derivadas parciales aplicado y en particular se trata la ecuación del calor unidimensional.

ÍNDICE

1. El concepto Stiffness	1
2. Definiciones de estabilidad para sistemas stiff	4
3. Métodos numéricos para sistemas stiff	5
3.1. M.I.L. para sistemas stiff	5
3.2. Métodos Runge-Kutta para sistemas stiff	6
4. Ideas generales sobre el Método de Líneas	6
4.1. Un ejemplo para la ecuación del calor unidimensional	7
4.2. El sistema semi-discreto	8
4.3. Estudio de la convergencia	9
4.4. Implementación y sus resultados	11
Referencias	12

1. EL CONCEPTO STIFFNESS

Para explicar el problema stiffness comenzaremos con algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1.1. Considere el sistema diferencial lineal

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2000 & 999,75 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1000,25 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con las condiciones iniciales $u(0) = 0, v(0) = -2$ cuya solución exacta

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 - 1,499875 e^{-0,5 t} + 0,499875 e^{-2000,5 t}, \\ v(t) &= 1 - 2,99975 e^{-0,5 t} - 0,00025 e^{-2000,5 t}, \end{aligned}$$

representada en la figura 1 tienen tres partes, una parte estacionaria que es el 1, un regimen transitorio lento en azul y otro rápido en rojo. La parte rápida es practicamente cero en $t = 0,001$ y la lenta a partir de $t = 10$. Sin embargo si

quisiéramos por ejemplo integral (1.1) con un Runge-Kutta de cuatro evaluaciones, las condiciones de estabilidad obligarían a

$$2000,5 h < 2,78 \Rightarrow h < 0,00138,$$

que para integra en $[0, 20]$ necesitaría del orden de 15000 pasos y 60000 evaluaciones que resulta inadmisibile para un problema tan sencillo. El problema consiste en que **la longitud del paso se elige por razones de estabilidad y no precisión. El régimen transitorio rápido, a pesar de que desaparece muy pronto en la solución, condiciona gravemente la longitud del paso.**

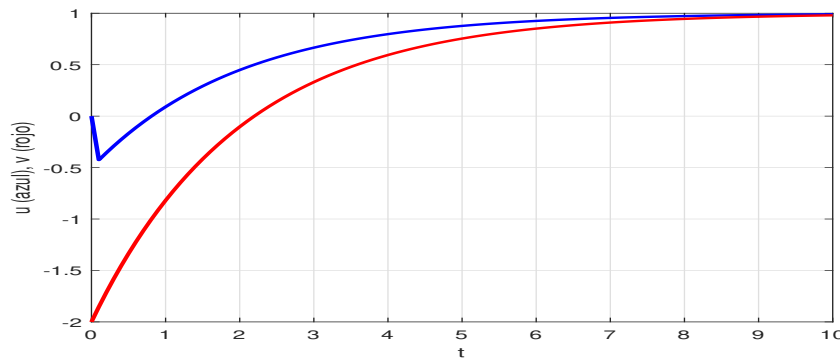
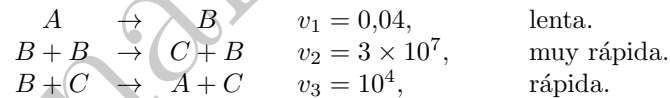


FIGURA 1. Soluciones exactas de (1.1).

Ejemplo 1.2. En el [ejemplo de Robertson](#) de 1966 se modeliza una reacción entre tres productos químicos con velocidades diferentes:



que lleva al siguiente sistema de O.D.E.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1(t) &= -0,04 y_1(t) + 10^4 y_2(t) y_3(t), \\ \frac{d}{dt} y_2(t) &= 0,04 y_1(t) - 10^4 y_2(t) y_3(t) - 3 \times 10^7 y_2(t)^2, \\ \frac{d}{dt} y_3(t) &= 3 \times 10^7 y_2(t)^2. \end{aligned}$$

En la figura 2 se ha dibujado la solución con los comandos `ode45` y `ode15s` para $0 \leq t \leq 3$ y las condiciones iniciales $(1, 0, 0)$. En la figura 3 se ha realizado un zoom de la primera gráfica y se aprecia claramente un comportamiento oscilante, de hecho, mientras que `ode45` realiza 8251 pasos, el otro comando tiene la solución en sólo 34 pasos.

Un sistema lineal

$$(1.2) \quad \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \phi(t),$$

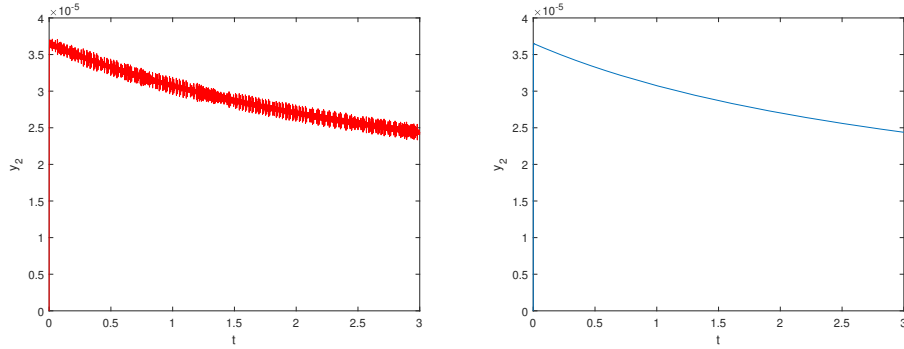


FIGURA 2. Solución del sistema de Robertson con ode45 y ode15s respectivamente.

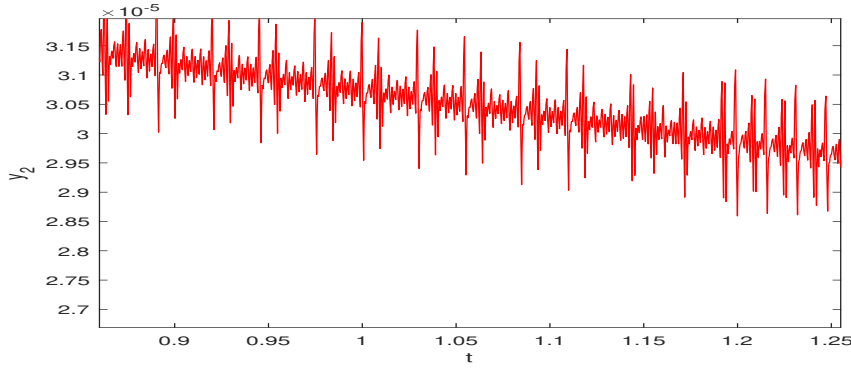


FIGURA 3. Ampliación de la gráfica con ode45

con la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ constante, tiene una solución de la forma

$$(1.3) \quad \mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^m d_k e^{\lambda_k t} \mathbf{c}_k + \psi(t),$$

donde las d_k son constantes y $\psi(t)$ es una solución particular de (1.2). Suponiendo ahora que $\Re \lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, m$,

$$\sum_{k=1}^m d_k e^{\lambda_k t} \mathbf{c}_k \rightarrow \mathbf{0}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

que es la parte transitoria de la solución de (1.2) mientras que $\psi(t)$ es la parte estacionaria. La rapidez con la que se hace cero cada elemento del sumatorio depende de $|\Re \lambda_k|$, si λ_μ y λ_ν son los autovalores tales que

$$|\Re \lambda_\mu| \geq |\Re \lambda_k| \geq |\Re \lambda_\nu|, \quad k = 1, \dots, m,$$

entonces $d_\mu e^{\lambda_\mu t} \mathbf{c}_\mu$ es el régimen más rápido y $d_\nu e^{\lambda_\nu t} \mathbf{c}_\nu$ el más lento. Entonces un sistema (1.2) se dice que es stiff si $|\Re \lambda_\mu| \gg |\Re \lambda_\nu|$ y se define su **radio stiffness** por el cociente $\frac{|\Re \lambda_\mu|}{|\Re \lambda_\nu|} \gg 1$. En el primer ejemplo el radio stiffness es 4000,5 Como ya

se comenta en los ejemplos, en la solución conviven regímenes transitorios rápidos con los lentos, y los rápidos a pesar de que se hacen prácticamente cero pronto, condicionan el paso por razones de estabilidad.

Los sistemas no lineales

$$(1.4) \quad \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)),$$

presentan un comportamiento stiffness si los autovalores de su Jacobiano $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$ tiene el comportamiento anterior. Según esto, los sistema stiff son problemas con constantes de Lipschitz grandes porque

$$L = \|\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}\| > \rho(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}) \gg 1.$$

Ejemplo 1.3. Considere el siguiente sistema stiff

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1 \ll \lambda_2 < 0.$$

Que se puede escribir de la forma

$$u'' - (a + d)u' + (ad - cb)u = u'' - (\lambda_1 + \lambda_2)u' + (\lambda_1 \lambda_2)u = 0,$$

que al dividir por λ_1 queda

$$\frac{1}{\lambda_1} u'' - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) u' + (\lambda_2)u = 0,$$

que es una ecuación de segundo orden que a muchos efectos se comporta como si fuera de primer orden. Es lo que se conoce como un problema de [perturbaciones singulares](#).

2. DEFINICIONES DE ESTABILIDAD PARA SISTEMAS STIFF

Se ha visto en los ejemplos anteriores que la dificultad en la integración numérica de un sistema stiff, básicamente está en las condiciones para la estabilidad absoluta del método. Por otra parte, como $\Re \lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, m$, y $\bar{h} = \lambda_k h$, para evitar este problema Dahlquist en 1966 definió la **A-stabilidad**

Definición 2.1. Un método se dice A-stable si su region estabilidad absoluta incluye todo el semiplano complejo izquierdo, es decir

$$\{ \bar{h} \mid \Re \bar{h} < 0 \} \subseteq \mathcal{R}_{abs}.$$

Por su parte Widlund en 1967 definió la **$A(\alpha)$ -estabilidad** para un $\alpha \in (0, \pi/2)$

Definición 2.2. Un método se dice $A(\alpha)$ -stable si su region estabilidad absoluta incluye todo el semiplano complejo izquierdo, es decir

$$\{ \bar{h} \mid -\alpha < \pi - \arg \bar{h} < \alpha \} \subseteq \mathcal{R}_{abs}.$$

Definición 2.3. Un método se dice **A_0 -stable** si su region estabilidad absoluta incluye todo un sector del semi eje real izquierdo, es decir

$$\{ \bar{h} \mid \Re \bar{h} < 0, \Im \bar{h} = 0 \} \subseteq \mathcal{R}_{abs}.$$

Definición 2.4. Un método se dice **stiff-stable** existen dos recintos de la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{ \bar{h} \mid \Re \bar{h} < -a \}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{ \bar{h} \mid -a \leq \Re \bar{h} < b, -c \leq \Im \bar{h} < c \},\end{aligned}$$

donde a, b, c son constantes positivas. Tales que $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_{abs}$ y el método es preciso en \mathcal{R}_2 .

3. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SISTEMAS STIFF

3.1. M.l.l. para sistemas stiff. Aunque los l.m.m. tienen buenas propiedades de estabilidad, son muy pocos los A-stables. Por ejemplo, la regla de los trapecios: $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}(f_{n+1} + f_n)$ aplicada a la función test $y' = \lambda y$ resulta

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2 + \bar{h}}{2 - \bar{h}},$$

y por lo tanto es un método A-estable.

Si buscara más l.m.m. A-estable estaría perdiendo el tiempo porque se pueden demostrar los siguientes resultados

Teorema 3.1. *Segunda barrera de Dahlquist*

1. Todos l.m.m. A-estable son implícitos.
2. Si un l.m.m. es A-estable su orden $p \leq 2$.
3. Entre todos los l.m.m. A-estables de segundo orden, el de menor constante de error es la regla de los trapecios.

Demostración. Ver [3, Capítulo V.1] □

Por otra parte, considerando que el polinomio de estabilidad de un l.m.m. es

$$(3.1) \quad \pi(r, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \beta_j) r^j = \rho(r) - \bar{h} \sigma(r),$$

y como las raíces de un polinomio son funciones continuas de sus coeficientes, resulta que las raíces de (3.1) tiende a las raíces de $\sigma(r)$ cuando $\bar{h} \rightarrow -\infty$ y por lo tanto para que dichas raíces sean pequeñas la mejor situación se debiera obtener cuando $\sigma(r) = r^k$ porque todas sus raíces valen cero, son los conocidos **BDF** (backward differentiation methods). En la figura 4 se representa la frontera de las regiones de estabilidad de los seis primeros métodos BDF, el caso $k = 1$ la región de estabilidad es el exterior del círculo de centro $(1, 0)$ y radio 1 representado en color verde, el $k = 2$ sería el exterior a la curva en azul etc...

En la tabla adjuntada se especifican los coeficientes y los valores a_{min} que es el valor mínimo en la stiff estabilidad y α_{max} que es el valor para el cual el método de $A(\alpha)$ -estable.

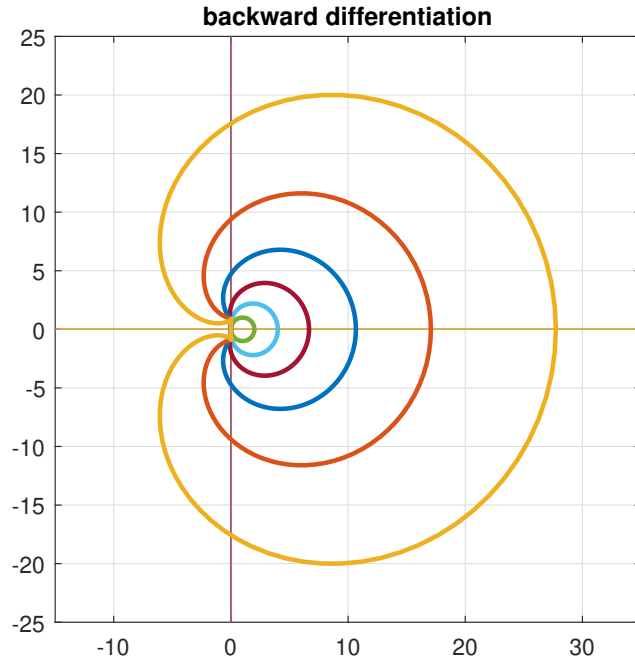


FIGURA 4. Regiones de estabilidad absoluta de los seis primeros BDF

k	β_k	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0	a_{min}	α_{max}
1	1						1	-1	0	90°
2	$\frac{2}{3}$					1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	90°
3	$\frac{6}{11}$				1	$-\frac{18}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0.1	88°
4	$\frac{12}{25}$			1	$-\frac{40}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{16}{25}$	$\frac{3}{25}$	0.7	73°
5	$\frac{60}{137}$		1	$-\frac{300}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{200}{137}$	$\frac{75}{137}$	$-\frac{12}{137}$	2.4	51°
6	$\frac{60}{147}$	1	$-\frac{360}{147}$	$\frac{450}{147}$	$-\frac{400}{147}$	$\frac{225}{147}$	$-\frac{72}{147}$	$\frac{10}{147}$	6.1	18°

3.2. Métodos Runge-Kutta para sistemas stiff. Para desarrollar este párrafo sería aconsejable comenzar con la referencia [5] y [1] aunque la referencia más completa [3].

4. IDEAS GENERALES SOBRE EL MÉTODO DE LÍNEAS

El Método de Líneas (MOL) es un procedimiento para resolución numéricamente Ecuaciones en Derivadas Parciales (PDE) de evolución. El método se compone

de dos etapas: en la primera las derivadas espaciales las aproximamos por diferencias finitas, elementos finitos, espectrales..., para obtener un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE) que en la segunda etapa podemos aproximar con técnicas estándar (las referencias más completas sobre este tema son [2] y [3]), e incluso se puede utilizar rutinas comerciales o de libre disposición, en el caso concreto de MATLAB recomendamos la referencia [7].

El primer trabajo donde se utilizan estas ideas, fue escrito por Lagrange en 1759 para explicar la propagación del sonido utilizando resultados de elasticidad, podemos leer en la página 25 de [3] como Lagrange, sin conocerlo, utilizaba un MOL para resolver la ecuación de ondas que Fourier había obtenido en 1748.

Consideramos un problema de Cauchy abstracto

$$(4.1) \quad u_t = \mathfrak{F}(t, u), \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

donde \mathfrak{F} representa un operador en derivadas parciales en la variable espacial x en un dominio en \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . La variable u también pudiera ser un vector, y las condiciones frontera, si las hubiera, se suponen incluidas en la definición del operador \mathfrak{F} .

Cuando discretizamos la variable espacial x con un paso h , al problema (4.1) le asociamos otro problema de Cauchy pero ahora para un sistema de ODE

$$(4.2) \quad \mathbf{U}_t = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}), \quad 0 < t \leq T, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0,$$

donde $\mathbf{F}(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ con la dimensión m dependiendo del paso h y \mathbf{U} serían las aproximaciones de la solución exacta u en los nodos de la malla.

Para estudiar la convergencia de nuestro método debemos escribir el error cometido que es la diferencia entre la solución exacta u y la aproximación \mathbf{U} , como ambas soluciones están definidas en variables diferentes, para u la variable espacial x es continua, mientras que \mathbf{U} sólo depende del tiempo t , para compararlas necesitamos utilizar el operador restricción natural sobre los puntos de la red r_h que define $\mathbf{u}_h(t) = r_h u(x, t)$, el valor de la solución exacta en la malla. El error será entonces

$$(4.3) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{U}(t) - \mathbf{u}_h(t),$$

que debe hacerse tan pequeño como queramos tomando el paso h sea suficientemente pequeño, y para concluir dicho resultado trataremos de acotamos el error por expresiones que tiendan a cero cuando $h \rightarrow 0$. En problema de este método, es que en general, obtener dichas acotaciones del error es bastante laborioso tal y como veremos en el siguiente ejemplo de la ecuación del calor.

4.1. Un ejemplo para la ecuación del calor unidimensional. En este primer ejemplo consideraremos la ecuación del calor unidimensional en un intervalo finito de la forma

$$(4.4) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Esta ecuación modela la distribución de la temperatura en un alambre de longitud π aislado, con los extremos a cero grados y partiendo de la distribución inicial de temperaturas $\varphi(x)$.

El **método de separación de variables** calcula la solución en forma de serie de Fourier:

$$(4.5) \quad u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\varphi}_j e^{-j^2 t} \omega_j(x),$$

donde las $\omega_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$ son las autofunciones y $\hat{\varphi}_j$ son los coeficientes de Fourier de $\varphi \in L^2(0, \pi)$, es decir:

$$(4.6) \quad \hat{\varphi}_j = \int_0^{\pi} \varphi(x) \omega_j(x) dx.$$

De la expresión (4.5) se deduce entonces que:

$$(4.7) \quad \|u(t)\|_{L^2(0, \pi)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_j(x)|^2 e^{-2j^2 t} \leq e^{-2t} \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_j(x)|^2 = e^{-2t} \|\varphi\|_{L^2(0, \pi)}^2,$$

que demuestra como **la solución decrece exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$** en contra del decrecimiento potencial general.

Este mismo resultado se alcanza estudiando la **evolución de la energía del sistema**:

$$(4.8) \quad E(t) = \int_0^{\pi} u^2(x, t) dx,$$

porque se comprueba que:

$$(4.9) \quad \frac{d}{dt} E(t) \leq -2E(t),$$

de donde se deduce el mismo decrecimiento que en la desigualdad (4.7).

Como la solución es la serie infinita (4.5), un posible primer intento de aproximación sería **truncar la serie**, es decir, para cada número natural M estimar las sumas parciales:

$$(4.10) \quad u_M(x, t) = \sum_{j=1}^M \hat{\varphi}_j e^{-j^2 t} \omega_j(x).$$

con una evidente cota de error:

$$(4.11) \quad \|u(x, t) - u_M(x, t)\|_{L^2(0, \pi)} \leq e^{-M^2 t/2} \|\varphi(x)\|_{L^2(0, \pi)}, \quad \forall t > 0$$

lo que demuestra la **convergencia en norma L^2 cuando $M \rightarrow \infty$** . El problema para utilizar este método de las series de Fourier truncadas es que se necesitan conocer las autofunciones del Laplaciano con las condiciones fronteras y en el dominio del problema que se estudia, y aunque la teoría espectral garantiza la existencia de la sucesión de autofunciones que forman una base ortogonal, el problema es que **las autofunciones sólo se pueden calcular en casos muy particulares**.

4.2. El sistema semi-discreto. Discretizando la variable x con una longitud paso $h = \frac{\pi}{M+1}$ y utilizamos la clásica aproximación de tres puntos para la segunda derivada, se llega a un sistema de M ecuaciones diferenciales ordinarias lineales acopladas

$$(4.12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u_j(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} = 0, & j = 1, \dots, M \quad t > 0 \\ u_0(t) = u_{M+1}(t) = 0, & t > 0 \\ u_j(0) = \varphi(jh), & j = 1, \dots, M \end{cases},$$

que vectorialmente se puede escribirse de la forma abreviada

$$(4.13) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{u}(t) + A_h \vec{u}(t) = \vec{0}, \\ \vec{u}(0) = \vec{\varphi}. \end{cases}$$

donde $\varphi_j = \varphi(x_j)$ y

$$(4.14) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix}, \quad A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

cuya solución exacta es

$$(4.15) \quad \vec{u}(t) = e^{-tA_h} \vec{\varphi}.$$

Podemos hacer un [análisis de Fourier](#) del sistema (4.12). Considerando el problema de autovalores

$$(4.16) \quad A_h \vec{w} = \lambda \vec{w},$$

los autovalores son

$$(4.17) \quad \lambda_l(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(l \frac{h}{2} \right), \quad l = 1, \dots, M,$$

y los autovectores asociados

$$(4.18) \quad \vec{w}_l(h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} \sin(lx_1) \\ \vdots \\ \sin(lx_M) \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, M,$$

de donde concluimos que cuando $h \rightarrow 0$ **los autovalores y autovectores del problema semi-discreto convergen a los autovalores y autovectores del problema continuo**. Además, observemos que cuando refinando la red, M crece y h decrece, y teniendo en cuenta la expresión de los autovalores (4.17) **el problema se va haciendo cada vez mas stiff** y debemos resolverlo con métodos numéricos adecuados (en [3] y [5] puede encontrarse un explicación sobre las dificultades de estos problemas y en [7], [6] y [4] su resolución con MATLAB).

4.3. Estudio de la convergencia. Para conseguir acotar los errores que son las diferencias entre la solución del sistema semi-discreto (4.12) y a la solución de la ecuación del calor (4.4), podemos usar una técnica denominada como [método de la energía](#) que consiste en lo siguiente: primero se define una energía discreta que recuerda a la expresión (4.8)

$$(4.19) \quad E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |u_j|^2.$$

Los dos lemas siguientes son necesarios para demostrar la convergencia

Lema 4.1.

$$(4.20) \quad \frac{d}{dt} E_h(t) = -h \sum_{j=0}^M \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2.$$

Lema 4.2 (Versión discreta de la desigualdad de Poincaré). *Para todo $\delta > 0$ existe un $h_0 > 0$ tal que para todo $0 < h < h_0$ y para toda sucesión a_0, a_1, \dots, a_{M+1} con $a_0 = a_{M+1} = 0$ se tiene:*

$$(4.21) \quad h \sum_{j=0}^M \left| \frac{a_{j+1} - a_j}{h} \right|^2 \geq (1 - \delta) h \sum_{j=1}^M |a_j|^2.$$

Si u_j es la solución de la ecuación semi-discreta (4.12) y \underline{u}_j son los valores de la solución exacta en el mallado, el error es

$$(4.22) \quad \vec{e} = \{e_j\}_{j=1, \dots, M}, \quad e_j = \underline{u}_j - u_j.$$

Evidentemente, los errores e_j satisfacen el problema

$$(4.23) \quad \begin{cases} e_j - \frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{h^2} = \varepsilon_j, & j = 1, \dots, M & t > 0 \\ e_0 = e_{M+1} = 0, & & t > 0 \\ e_j(0) = 0, & j = 1, \dots, M & \end{cases},$$

donde ε_j son los errores de truncatura locales

$$(4.24) \quad \varepsilon_j = \underline{u}_{xx}(x_j, t) - \frac{\underline{u}_{j+1} - 2\underline{u}_j + \underline{u}_{j-1}}{h^2}$$

que al ser aproximaciones de segundo orden están acotados de la forma

$$(4.25) \quad |\varepsilon_j(t)|^2 \leq Ch^4 \|u(t)\|_{C^4([0, \pi])}^2,$$

para $1 \leq j \leq M$, $0 \leq h \leq h_0$ $0 \leq t \leq T$.

Operando de forma similar a la realizada en la demostración del lema primero, obtenemos que

$$(4.26) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |e_j|^2 \right] = -h \sum_{j=0}^M \left| \frac{e_{j+1} - e_j}{h} \right|^2 + h \sum_{j=1}^M \varepsilon_j e_j,$$

y utilizando la desigualdad de Poincaré con $\delta = 1/2$ tenemos que

$$(4.27) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |e_j|^2 \right] \leq -\frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |e_j|^2 + h \sum_{j=1}^M \varepsilon_j e_j \leq \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M |\varepsilon_j|^2,$$

de donde se llega a

$$(4.28) \quad h \sum_{j=1}^M |e_j(t)|^2 \leq h \sum_{j=1}^M \int_0^T |\varepsilon_j(t)|^2 dt, \quad 0 < h < h_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Usando ahora desigualdad (4.25) se llega finalmente a la acotación

$$(4.29) \quad \|\vec{e}\|_h^2 = h \sum_{j=1}^M |e_j(t)|^2 \leq Ch^4 \int_0^T \|u(t)\|_{C^4([0, \pi])}^2 dt,$$

que demuestra la **convergencia de orden dos** siempre que la integral de la derecha sea finita.

4.4. Implementación y sus resultados. A continuación se presenta la implementación en MATLAB de nuestro método de líneas y en la figura 5 los resultados con un tiempo de ejecución de aproximadamente 0.68 segundos, la condición inicial se puede leer en el programa.

```
% CALORFERNANDO
% method of line for:  u_t=u_xx
clear
tic
% Parameters shared with the ODE routine
global ncall dd
dd=1;
% Initial condition
x=0:.01:pi;
u0=exp(-10*(x-1).^2)+exp(-20*(x-2).^2)/2+exp(-20*(x-2.5).^2)/4;
% Independent variable for ODE integratio
n=20;
t0=0;
tf=1;
tout=linspace(t0,tf,n);
ncall=0;
%
reltol=1.0e-04; abstol=1.0e-04;
options=odeset('RelTol',reltol,'AbsTol',abstol);
[t,u]=ode15s(@pde,tout,u0,options);
waterfall(x,t,u)
grid off
axis([0 pi t0 tf 0 1]);
xlabel('x'), ylabel('time'),zlabel('u')
ncall
toc
return
```

donde se utiliza la función

```
% para calorfernando
function ut=pde(t,u)
%
% Problem parameters
global ncall dd
xl=0.0;
xu=pi;
nn=length(u);
dx2=((xu-xl)/(nn-1))^2;
for i=1:nn
    if(i==1)    ut(i)=0;
    elseif(i==nn) ut(i)=0; % 2.0*(u(i-1)-u(i))/dx2;
    else        ut(i)=dd*(u(i+1)-2.0*u(i)+u(i-1))/dx2;
```

```

end
end
ut=ut';
ncall=ncall+1;

```

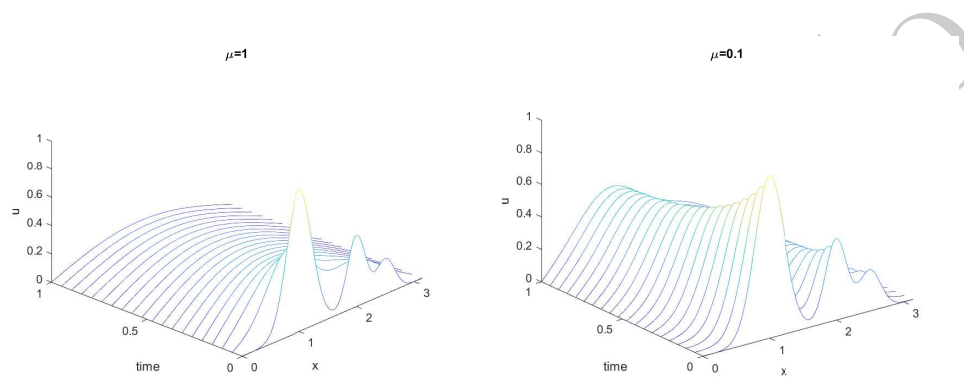


FIGURA 5. Resultado para las coeficientes de difusión $\mu = 1$ y $\mu = 0,1$.

REFERENCIAS

1. J.C. Butcher, *Numerical Methods for O.D.E. Second Edition*, Wiley, 2003.
2. E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer, 1987.
3. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer, 1991.
4. D.J. Higham and N.J. Higham, *MATLAB guide*.
5. J.D. Lambert, *Numerical Methods for O.D.E. The Initial Value Problems*, Wiley, 1991.
6. C.B. Moler, *Numerical Computing with MATLAB*, SIAM, 2004.
7. L.F. Shampine, I. Gladwell, and S. Thompson, *Solving ODEs with MATLAB*, Cambridge University Press, 2003.

DEP. MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO
 Email address: fernando.vadillo@ehu.es