MÉTODOS LINEALES MULTIPASO

F. VADILLO

RESUMEN. En esta lección se presenta la teoría de los métodos lineales multipaso (l.m.m.) Además de definir el tipo de métodos y estudiar su teoría de convergencia, también se analizan sus propiedades de estabilidad absoluta y relativa. Finalmente, se analizan los métodos predictor corrector que se utilizan en las implementaciones habituales.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN A LOS L.M.M.

Dado un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), & t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

Received by the editors 24 de abril de 2023.

se define un paso $h = \frac{T-t_0}{N}$, se construye una red de punto equidistante $t_n = t_0 + nh$. Un método de k pasos es una ecuación en diferencias de la forma

$$y_{n+k} = \Phi(t_n, t_{n+1}, \cdots, t_{n+k}, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+k}; h),$$

aunque los métodos más estudiados son los l.m.m. (linear multistep method) de la forma

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \; y_{n+j} \;=\; h \; \sum_{j=0}^{k} \beta_j \; f_{n+j}, \tag{1.2}$$

donde $f_{n+j} = f(t_{n+j}, y_{n+j})$ y con $\alpha_k = 1$ y $\alpha_0 \; \beta_0 \neq 0$ junto con unos valores iniciales

$$y_\mu \;=\; \eta_\mu(h), \qquad \mu = 0, 1, \cdots, (k-1). \tag{1.3}$$

La forma más cómodo de identificar un l.m.m. es utilizando sus dos polinomios característicos

Primer polinomio característico:

$$\rho(z) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \; z^j \tag{1.4}$$

Segundo polinomio característico:

$$\sigma(z) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \beta_j \; z^j \tag{1.5}$$

Los l.m.m. se dividen en dos tipos diferentes

- Explícitos: $\beta_k \;=\; 0$.
- Implícitos: $\beta_k \;\neq\; 0$.

Para los métodos implícitos en cada paso será necesario resolver una ecuación en diferencias

$$y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; y_{n+j} \;=\; h \; \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \; f_{n+j} + h \; \beta_k \; f(t_{n+k}, y_{n+k}),$$

que es una ecuación del tipo

$$y \;=\; F(y) \;=\; c \;+\; h \; \beta_k \; f(t_{n+k}, y),$$

es decir, la solución sería un punto fijo de $F(y)$ para lo que se precisaría que fuera contractiva,

$$|F(y) - F(y^*)| \;=\; h \; |\beta_k| \; |f(t_{n+k}, y) - f(t_{n+k}, y^*)| \;\leq\; h \; |\beta_k| \; L \; |y - y^*|,$$

y por tanto, cuando

$$h \; |\beta_k| \; L \;<\; 1, \quad \Rightarrow \quad h \;<\; \frac{1}{L \; |\beta_k|}. \tag{1.6}$$

la iteración de punto fijo

$$y_{n+k}^{(m+1)} \;=\; -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; y_{n+j} + h \; \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \; f_{n+j} + h \; \beta_k \; f(t_{n+k}, y_{n+k}^{(m)}) \tag{1.7}$$

para $m = 0, 1, \cdots$ convergerá a la solución de (1.2).

2. Teoría de la convergencia de l.m.m.

Definicion 2.1. Error de truncatura local Del método (1.2) para el problema (1.1) en t_{n+1} al valor

$$d_{n+k} = y(t_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; y(t_{n+j}) - h \; \sum_{j=0}^{k} \beta_j \; f(t_{n+j}, y(t_{n+j})).$$

Es decir, el error que comete la solución exacta en el método numérico.

Definicion 2.2. Consistencia Se dice que el método (1.2) es consistente con el problema (1.1) si

$$\lim_{h\to 0} \left(\max_{n=0,\cdots,N-k} \frac{|d_{n+k}|}{h} \right) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad d_{n+k} = \mathbf{o}(h).$$

Definicion 2.3. Cero estabilidad Se dice que el método (1.2) es cero-estable si dadas dos sucesiones $\{y_n\}, \{z_n\}$ tales que

$$\begin{cases} y_{n+k} \;=\; -\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; y_{n+j} + h \; \sum_{j=0}^{k} \beta_j \; f(t_{n+k}, y_{n+j}), \\ \\ y_\mu, \quad \mu = 0, \cdots, (k-1), \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} z_{n+k} \;=\; -\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; z_{n+j} + h \left[\sum_{j=0}^{k} \beta_j \; f(t_{n+k}, z_{n+j}) + \epsilon_n \right], \\ \\ z_\mu, \quad \mu = 0, \cdots, (k-1), \end{cases}$$

existen constantes M_1, M_2 tales que

$$\max_{0\le n\le N} |y_n - z_n| \;\le\; M_1 \max_{\mu=0,\ldots,(k-1)} |y_\mu - z_\mu| \;+\; M_2 \max_{0\le n\le N-k} |\varepsilon_n|.$$

mallskip

Definicion 2.4. Error de truncatura global en el punto t_n es $e_n \;=\; y(t_n) - y_n$.

Definicion 2.5. Convergencia Se dice que el método (1.2) es convergente para el problema (1.1) si

$$\max_{0\le n\le N} |e_n| \;=\; \mathbf{o}(1) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \max_{0\le n\le N} |e_n| \;=\; 0.$$

Teorema 2.6. *Teorema de convergencia Si el método numérico* (1.2) *es cero-estable y consistente con el problema* (1.1), *entonces es convergente.*

Demostración. Basta repetir la demostración de los métodos de un paso para llegar a la desigualdad

$$|e_{n+k}| \;\le\; M_1 \max_{\mu=0,\ldots,(k-1)} |e_\mu| \;+\; M_2 \max_{n=0,\cdot,N-k} \frac{|d_{n+k}|}{h}.$$

□

Teorema 2.7. *Condición necesaria y suficiente para la consistencia de un l.m.m.*

- *Si* $f \neq 0$ *el método* (1.2) *es consistente con* (1.1) *ssi* $\rho(1) = 0$ *y* $\rho'(1) = \sigma(1)$.
- *Si* $f = 0$ *el método* (1.2) *es consistente con* (1.1) *ssi* $\rho(1) = 0$.

Demostración. Ver notas de clase o [2]. □

Definicion 2.8. Orden de un método Se dice que el método (1.2) es de orden $p \in \mathbb{Z}^+$ para el problema (1.1) si

$$d_{n+k} \;=\; \mathbf{O}(h^{p+1}), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-k.$$

Y se dice simplemente que el método (1.2) es de orden p si lo es para todo problema (1.1) con f suficientemente regular.

Teorema 2.9. *Condiciones del orden de un l.m.m. El método* (1.2) *es de orden* p *ssi*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j &= 0, \\ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{k} j^m \,\alpha_j &= \sum_{j=0}^{k} j^{m-1}\,\beta_j, \quad m = 1, \cdots, p. \end{aligned}$$

Demostración. Ver notas de clase. □

Definicion 2.10. Condición de Dahlquist Se dice que un polinomio $p(z)$ vefica la condición de Dahlquist si sus raíces $|z_j| \le 1$ y las de modulo 1 son simples.

Teorema 2.11. *Condición necesaria y suficiente para la cero-estabilidad de un l.m.m. El método l.m.m.* (1.2) *es cero-estable si y sólo si su primer polinomio característico* $\rho(z)$ *es un polinomio de Dahlquist.*

Demostración. Ver notas de clase o [1]. □

Finalmente

Teorema 2.12. *Caracterización de la convergencia de un l.m.m.*

$$\textit{El método l.m.m. (1.2) es convergente ssi} \quad \left\{ \begin{array}{lll} (i) & \rho(1) & = \; 0, \\ (ii) & \rho'(1) & = \; \sigma(1), \\ (iii) & \rho(z) & \textit{polinomio Dahlquist.} \end{array} \right.$$

Demostración. Ver notas de clase o [1]. □

3. Deducción de los l.m.m.

3.1. Mediante desarrollos de Taylor. Si considera el desarrollo de Taylor de la función

$$y(t_n + h) \;=\; y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\, y''(t_n) + \cdots,$$

y se trunca por el término de segundo orden se tiene

$$y(t_n + h) \;\approx\; y(t_n) + h\, f(t_n, y(t_n)),$$

con el error

$$\frac{h^2}{2!}\ y''(t_n) + \cdots$$

que construye el más sencillo de toda esta familia de método el método de Euler

$$y_{n+1} \ = \ y_n + h\ f_n, \tag{3.1}$$

con un e.t.l. del tipo $\mathcal{O}(h^2)$ y orden uno.

Utilizando otros desarrollos de Taylor, por ejemplo

$$\begin{aligned} y(t_n+h) &= y(t_n) + h\ y'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}\ y'''(t_n) + \cdots, \\ y(t_n-h) &= y(t_n) - h\ y'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ y''(t_n) - \frac{h^3}{3!}\ y'''(t_n) + \cdots, \end{aligned}$$

y restando

$$y(t_n+h) - y(t_n-h) \ = \ 2h\ y'(t_n) + \frac{h^3}{3}\ y'''(t_n) + \cdots,$$

que al trunca construye la regla del punto medio

$$y_{n+1} \ = \ y_{n-1} + 2h\ f_n,$$

que se suele escribir de la forma

$$y_{n+2} \ = \ y_n + 2h\ f_{n+1}, \tag{3.2}$$

con un e.t.l. del tamaño $\mathcal{O}(h^3)$ y orden dos.

Evidentemente esta técnica se puede aplicar a caso más generales, si por ejemplo quisiera construir un método general de un paso

$$y_{n+1} + \alpha_0\ y_n \ = \ h\ (\beta_1\ f_{n+1} + \beta_0\ f_n),$$

llevando los desarrollos de $y(t_{n+1})$ e $y'(t_{n+1})$ se tiene

$$C_0\ y(t_n) + C_1\ h\ y'(t_n) + C_2\ h^2\ y''(t_n) + C_3\ h^3\ y'''(t_n) + \cdots = 0,$$

donde

$$C_0 = 1 + \alpha_0,\ C_1 = 1 - \beta_1 - \beta_0,\ C_2 = \frac{1}{2} - \beta_1,\ C_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\beta_1,$$

que dará el mayor orden cuando $\alpha_0 = -1, \beta_1 = \beta_0 = 1/2$ con $C_3 = -1/12$ que se conoce como regla de los trapecios

$$y_{n+1} - y_n \ = \ \frac{h}{2}\ (f_{n+1} + f_n), \tag{3.3}$$

con un e.t.l. del tamaño de $\mathcal{O}(h^3)$ y orden dos.

3.2. Mediante integración numérica. Considere por ejemplo la identidad

$$y(t_{n+2}) - y(t_n) \ = \ \int_{t_n}^{t_{n+2}} y'(t)\ dt \ = \ \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\ dt,$$

y ahora se aproxima la integral por una fórmula de cuadratura por ejemplo interpolatoria en los punto $(t_n, f_n), (t_{n+1}, f_{n+1})$ y (t_{n+2}, f_{n+2})

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+2}} y'(t)\ dt \ \approx \ \int_{t_n}^{t_{n+2}} p_2(t)\ dt \ &= \ \int_0^2 \left[f_n + r\triangle f_n + \frac{r(r-1)}{2!}\triangle^2 f_n \right] h\ dr \\ &= \ h\ [2f_n + 2\triangle f_n + \frac{1}{3}\triangle^2 f_n], \end{aligned}$$

de donde se deduce el método implícito de dos pasos llamado la regla de Simpson

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}\,(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n), \tag{3.4}$$

con un e.t.l. del tamaño de $\mathcal{O}(h^5)$ y orden cuatro.

De forma parecida usando la identidad

$$y(t_{n+2}) - y(t_{n+1}) = \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} y'(t)\,dt,$$

se llega al método de Adams-Moulton de dos pasos

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}\,(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n). \tag{3.5}$$

3.3. Mediante interpolación. La regla de Simpson también se puede construir utilizando conceptos de interpolación de la manera siguiente.

Sea $I(x)$ el polinomio interpolador del problema de Hermite

$$I(t_{n+j}) = y_{n+j}, \quad I'(t_{n+j}) = f_{n+j}, \quad j = 0, 1, 2,$$

pero en lugar de buscar un polinomio de grado cinco se toma otro de grado cuatro

$$I(t) = at^4 + bt^3 + ct2 + dt + e.$$

Eliminando los cinco coeficiente a, b, c, d, e y utilizando la sexta relación se llega a la fórmula de Simpson (3.4).

4. Orden alcanzable. Métodos optimales

Dado un l.m.m. (1.2) se le asocia el operador diferencial

$$\mathfrak{L}[y(t); h] = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j\, y(t + jh) - h\, \beta_j\, y'(t + jh)], \tag{4.1}$$

donde $y(t)$ es una función arbitraria. Suponiendo que la función $y(t)$ es suficientemente diferenciales y usando desarrollos de Taylor

$$\mathfrak{L}[y(t); h] = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(t) + \cdots, \tag{4.2}$$

con las C_q constantes.

Definicion 4.1. El operador lineal (4.1) y su l.m.m. asociado (1.2) se dicen de orden p si en (4.2) $C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0$ y $C_{p+1} \neq 0$. Es decir,

$$\mathfrak{L}[y(t); h] = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t) + \mathbf{O}(h^{p+2}),$$

donde C_{p+1} se denomina contante de error del método.

Un simple cálculo permite asociar los coeficiente C_p con los α_j, β_j de la forma

$$\begin{aligned}
C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \\
C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \cdots + \beta_k), \\
C_q &= \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + k^q\alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \cdots + k^{q-1}\beta_k), \\
&\quad \text{para} \quad q = 2, 3, \cdots .
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Construya un método implícito de dos paso de máximo orden. (Ver [4, pag. 26].

Teorema 4.3. *El l.m.m.* (1.2) *convergente es de orden* p *si y sólo si*

$$\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} = \ln(z) + \mathbf{O}((z-1)^{p+1}), \quad \textit{cuando} \quad z \to 1.$$

Demostración. [3, pag. 317]. □

Teorema 4.4. *Primera barrera de Dahlquist Si el l.m.m.* (1.2) *de* k *pasos es cero estable, entonces su orden*

$$\begin{aligned} p &\leq k+2, \quad \textit{cuando } k \textit{ es par}, \\ p &\leq k+1, \quad \textit{cuando } k \textit{ es impar}, \end{aligned}$$

Demostración. [3, pag. 332]. □

Ejemplo 4.5. Construya el método óptimo de 2 pasos conocido como regla de Simpson. (Ver [4, pag. 38].

5. Especificación de algunos l.m.m.

Los l.m.m. que se construyen usando fórmulas de cuadratura tiene sólo dos y_{n+j} y cuando están basadas en fórmulas interpolatorias se tiene expresiones del tipo

$$y_{n+1} - y_n = h\left(1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \cdots\right) f_{n+1}.$$

Tomando los dos primeros términos se tiene el l.m.m. que es la regla de los trapecios

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\,(f_{n+1} + f_n).$$

Con los tres primeros términos resulta el l.m.m. Tomando los dos primeros términos se tiene el l.m.m.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\,(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}),$$

que escrito en forma standard resulta el Adams-Moulton de dos pasos

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}\,(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n).$$

En general, los l.m.m. con un primer polinomio característico $\rho(z) = z^k - z^{k-1}$ son los Métodos de Adams, los explícitos son Adams-Bashforth y los implícitos Adams-Moulton. Cuando $\rho(z) = z^k - z^{k-2}$ son Métodos de Nyström los explícitos y los implícitos Métodos Milne-Simpson que evidentemente son cero estables.

En la página 41 de [4] se pueden encontrar listados los l.m.m. explícitos e implícitos para $k = 1, 2, 3, 4$ más habituales.

6. Estabilidad absoluta y relativa de l.m.m.

Para estudiar la estabilidad para h fijo de los l.m.m. como en caso anteriores se aplica a la ecuación test $y' = \lambda y$ y se buscan las condiciones de una buena propagación de los errores.

Si el l.m.m. es convergente, es decir, consistente y cero-estable,

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, y(t_{n+j}) \;=\; h \, \sum_{j=0}^{k} \beta_j \, f(t_{n+j}, y(t_{n+j})) + T_{n+k},$$

donde $T_{n+k} = \mathfrak{L}[y(t_n); h]$ es el e.t.l.

Por otra parte, si $\overline{y}_n$ denotan las soluciones con errores de redondeo, es decir,

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, \overline{y}_{n+j} \;=\; h \, \sum_{j=0}^{k} \beta_j \, f(t_{n+j}, \overline{y}_{n+j}) + R_{n+k},$$

entonces los errores $\overline{e}_n = y(t_n) - \overline{y}_n$ verifican la ecuación

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, \overline{e}_{n+j} \;=\; h \, \sum_{j=0}^{k} \beta_j \, \left(f(t_{n+j}, y(t_{n+j}) - f(t_{n+j}, \overline{y}_{n+j}) \right) + \phi_{n+k},$$

con $\phi_{n+k} = T_{n+k} - R_{n+k}$ y aplicando un teorema del valor medio

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, \overline{e}_{n+j} \;=\; h \, \sum_{j=0}^{k} \beta_j \, \frac{\partial f(t_{n+j}, \xi_{n+j})}{\partial y} \, \overline{e}_{n+j} + \phi_{n+k}.$$

Ahora para la ecuación test $y' = \lambda y$, la derivada parcial es la constante λ por lo que queda la ecuación en diferencias

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - \overline{h} \, \beta_j) \, \overline{e}_{n+j} \;=\; \phi_{n+k}.$$

con $\overline{h} = h\lambda$. Suponiendo además que los $\phi_{n+k} = \phi$,

$$\overline{e}_n \;=\; \sum_{s=0}^{k} d_s \, r_s^n \;-\; \frac{\phi}{\overline{h} \, \sum_{j=0}^{k} \beta_j},$$

donde las r_s son las raíces del polinomio característico de esta ecuación

$$\pi(r, \overline{h}) \;=\; \sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - \overline{h} \, \beta_j) \, r^j \;=\; \rho(r) - \overline{h} \, \sigma(r), \tag{6.1}$$

llamado polinomio de estabilidad del l.m.m..

Definicion 6.1. Estabilidad absoluta Un l.m.m. se dice absolutamente estable para una $\overline{h}$ si las todas las raíces de su polinomio de estabilidad $|r_s| < 1, s = 1, \cdots, k$. La región del plano complejo de $\overline{h}$ donde se verifica esta propiedad es su región de estabilidad absoluta y los valore reales se denomina intervalo de estabilidad absoluta.

Observe se que para $\overline{h} = 0$ el polinomio de estabilidad $\pi(r, 0) = \rho(r)$ cuyas raíces son ceros ξ_s de su primer polinomio característico que por la cero estabilidad están todos en el interior del círculo unidad. Además, $\xi_1 = 1$ y por la continuidad de las raíces de un polinomio respecto de sus coeficientes, las raíces $r_s \to \xi_s$ cuando $\overline{h} \to 0$

y en particular $r_1 \to \xi_1 = 1$. Más concretamente se puede demostrar el siguiente resultado

Teorema 6.2. *Si el l.m.m. es un método de orden p, entonces*

$$r_1 \;=\; \exp(\overline{h}) \;+\; \mathbf{O}(\overline{h}^{p+1}), \quad \textit{para} \quad \overline{h} \to 0.$$

Demostración. [4, pag. 67]. $\square$

La conclusión que se deriva de este resultado es que: cualquier l.m.m. es absolutamente inestable para $0 < \overline{h} \ll 1$. Este resultado negativa, sin embargo no es tan malo porque para que $0 < \overline{h}$ el $0 < \lambda$, es decir, las soluciones crecen, y si las soluciones crecen es admisible que los errores también lo hagan aunque en grado menor. Este argumento justifica la siguiente definición

Definicion 6.3. Estabilidad relativa Un l.m.m. se dice relativamente estable para una $\overline{h}$ si las todas las raíces de su polinomio de estabilidad $|r_s| < |r_1|, s = 2, \cdots, k$. Esto define las regiones e intervalos de estabilidad relativa.

Ejemplo 6.4. Consider el método explícito de 2 pasos

$$y_{n+2} - y_n \;=\; \frac{h}{2}(f_{n+1} + 3 f_n).$$

([4, pag. 70])

7. Métodos para obtener intervalos de estabilidad de l.m.m.

7.1. Métodos de representación geométrica de las raices. Este método hallar las raíces del polinomio de estabilidad (6.1) para un rango de valores de $\overline{h}$ en un entorno del origen y dibujar sus módulos

Ejemplo 7.1. Considere el método explícito de 2 paso

$$y_{n+2} - y_n \;=\; \frac{h}{2}(f_{n+1} + 3\ f_n).$$

cuyo polinomio de estabilidad es

$$\pi(r, \overline{h}) \;=\; r^2 - \frac{1}{2}\overline{h}\ r - \left(1 + \frac{3}{2}\overline{h}\right).$$

[4, pag. 77]

7.2. Método de Schur. Este método está basado en un teorema de Schur que caracteriza las condiciones sobre los coeficientes de un polinomio para que sus raíces tenga módulo menor que uno.

Definicion 7.2. Un polinomio de coeficientes complejos

$$p(r) \;=\; c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \cdots + c_0,$$

se dice que es un polinomio de Schur si sus raíces r_s tienen módulo inferior a uno.

Para caracterizar este tipo de polinomios se construye el polinomio

$$\widehat{p}(r) \;=\; c_0^* r^k + c_1^* r^{k-1} + \cdots + c_k^*,$$

donde c_j^* son los conjugados, y después se define otro polinomio de grado $k-1$

$$p_1(r) \;=\; \frac{1}{r}\,(\widehat{p}(0)p(r) - p(0)\widehat{p}(r)).$$

Teorema 7.3. *El polinomio $p(r)$ es de Schur si y sólo si $|\widehat{p}(0)| > |p(0)|$ y $p_1(r)$ es también de Schur.*

Este criterio sólo sirve para estudiar la estabilidad absoluta pero no la relativa.

Ejemplo 7.4. [4, pag. 79]

7.3. Método de Routh-Hurwitz. Este método se basa en la transformación conforme entre el círculo unidad y el semi-plano complejo de parte real negativa. La transformación

$$r \;=\; \frac{1+z}{1-z},$$

lleva el conjunto de $|r| < 1$ al semi-plano complejo $\Re\, z < 0$. Con esta transformación

$$\pi\left(\frac{1+z}{1-z}, h\right) \;=\; \rho\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - \overline{h}\;\sigma\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0,$$

multiplicado por $(1-z)^k$ resulta un polinomio de grado k

$$a_0\, z^k \;+\; a_1\, z^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\, z + a_k \;=\; 0,$$

con $a_0 > 0$. Entonces, la condición necesaria y su suficiente para que este polinomio tenga raíces con parte real negativa es que los menores principales de la matriz $k \times k$

$$\mathbf{Q} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

sean definidos positivos. En los casos $k = 2, 3, 4$ estas condiciones se reducen a

$$\begin{aligned} k = 2 \quad &: \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0. \\ k = 3 \quad &: \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0 \\ k = 4 \quad &: \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.5. [4, pag. 81]

7.4. Método de localización de la frontera. La idea de este método es dibujar la frontera de la región de estabilidad absoluta buscando los valores de $\overline{h}$ tales que las raíces del polinomio de estabilidad (6.1) tienen módulo 1, es decir, raíces de la forma $e^{i\theta}$. Por tanto,

$$\pi(e^{i\theta},\overline{h}) = \rho(e^{i\theta}) - \overline{h}\ \sigma(e^{i\theta}) = 0, \quad \Rightarrow \quad \overline{h}(\theta) \ = \ \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})},$$

que se puede dibujar dando valores a θ. En la figura 1 se han dibujado a la izquierda las regiones de estabilidad absoluta de los métodos de Adams-Bashforth de ordenes 1,2 y 3, mientras que a la derecha las regiones de estabilidad corresponden a los método Adams-Moulton de ordenes 3,4,5 y 6.

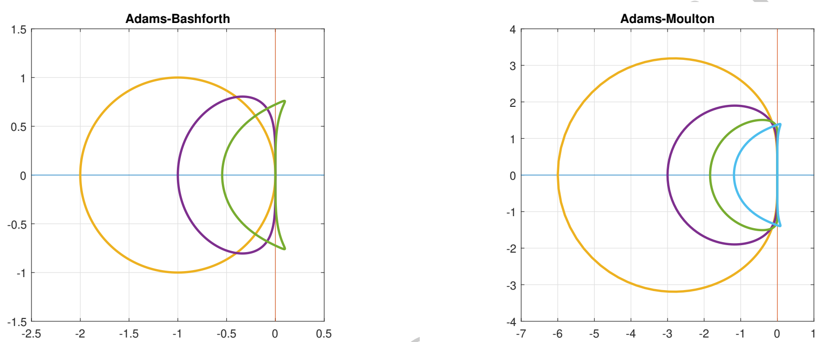

FIGURA 1. Regiones de estabilidad absoluta de los métodos Adams de orden bajo.

8. Comparación de métodos explícitos e implícitos

Es evidente que para k pasos los métodos explícitos son mucho más baratos pero alcanzan menor orden y tienen peores propiedades de estabilidad, en las tablas adjuntas se pueden comparar los métodos Adams explícitos e implícitos para $k = 1, 2, 3, 4$. Para los explícitos:

Adams-Bashforth				
k	1	2	3	4
p	1	2	3	4
C_{p+1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$
α	-2	-1	$-\frac{6}{11}$	$-\frac{3}{10}$

mientras que los implícitos:

Adams-Moulton				
k	1	2	3	4
p	2	3	4	5
C_{p+1}	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{11}{720}$	$-\frac{3}{160}$
α	$-\infty$	-6	- 3	$-\frac{90}{49}$

9. Métodos Predictor Corrector

Para utiliza un l.m.m. implícito en cada paso se debe resolver una ecuación del tipo

$$y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; y_{n+j} \;=\; h \; \beta_k \; f(t_{n+k}, y_{n+k}) + h \; \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \; f_{n+j},$$

donde todo es conocido salvo y_{n+k}.

Como ya se comento anteriormente, dicha ecuación se resuelve con una iteración de punto fijo

$$y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; y_{n+j} \;=\; h \; \beta_k \; f(t_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) + h \; \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \; f_{n+j}, \tag{9.1}$$

para $s = 0, 1, \cdots$ y con $y_{n+k}^{[0]}$ arbitrario y $h < 1/(L \cdot |\beta_k|)$.

En cada iteración (9.1) se debe evaluar f que puede ser costosa, por ejemplo en un sistema grande. Por esta razón es conveniente elegir un $y_{n+k}^{[0]}$ adecuado para que la iteración converja lo más rápido posible y lo habitual es utilizar otro método explícito que se denomina predictor (P), mientras que el implícito es el corrector (C).

Los métodos predictor corrector más utilizados son lo que fijan un número m de aplicaciones del corrector, por ejemplo en PEC predictor, evaluación y corrector $m = 1$. También se puede realizar una evaluación final PECE predictor, evaluación, corrector y evaluación, la diferencia está en usar en los pasos siguientes $f^{[0]}$ ó $f^{[1]}$.

En general si el corrector tiene los polinomios característicos

$$\rho^*(z) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^* \; z^j, \;\; \alpha_k^* = 1, \qquad \sigma^*(z) \;=\; \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \; z^j,$$

y el corrector

$$\rho(z) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \; z^j, \;\; \alpha_k = 1, \qquad \sigma(z) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \beta_j \; z^j.$$

Se puede escribir formalmente el modo $P(EC)^m E$ de la forma

$$\begin{aligned}
y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* \; y_{n+j}^{[m]} \;&=\; h \; \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \; f_{n+j}^{[m]}, \\
\text{Para } s = 0, 1, \cdots m-1, & \\
f_{n+k}^{[s]} \;&=\; f(t_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}), \\
y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \; y_{n+j}^{[m]} \;&=\; h \; \beta_k \; f_{n+k}^{[s]} + h \; \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \; f_{n+j}^{[m]}, \\
f_{n+k}^{[m]} \;&=\; f(t_{n+k}, y_{n+k}^{[m]}),
\end{aligned}$$

Mientras que el modo $P(EC)^m$ será

$$\begin{aligned} y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* \ y_{n+j}^{[m]} &= h \ \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \ f_{n+j}^{[m-1]}, \\ \text{Para } s = 0, 1, \cdots m-1, \qquad & \\ f_{n+k}^{[s]} &= f(t_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}), \\ y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \ y_{n+j}^{[m]} &= h \ \beta_k \ f_{n+k}^{[s]} + h \ \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \ f_{n+j}^{[m-1]}, \end{aligned}$$

En la práctica se suelen utilizar modelos con $m \leq 2$.

9.1. E.t.l. de los métodos P-C. Los dos métodos tienen operadores diferenciables asociados

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^*[y(t); h] &= C_{p^*+1}^* h^{p^*+1} y^{(p^*+1)}(t) + \mathbf{O}(h^{p^*+2}), \\ \mathfrak{L}[y(t); h] &= C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t) + \mathbf{O}(h^{p+2}), \end{aligned}$$

y para el predictor

$$y(t_{n+k}) - y_{n+k}^{[0]} = C_{p^*+1}^* h^{p^*+1} y^{(p^*+1)}(t) + \mathbf{O}(h^{p^*+2}).$$

Por otra parte, el corrector es

$$y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \ y_{n+j}^{[m]} = h \ \beta_k \ f_{n+k}^{[s]} + h \ \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \ f_{n+j}^{[m-t]}$$

donde $t = 0, 1$ dependiendo de la evaluación final o no. Además, su e.t.l. verifica

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(t_{n+j}) = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t_{n+j}, y(t_{n+j})) + \mathfrak{L}[y(t_n); h],$$

y restando considerando la hipótesis de exactitud local se tiene

$$y(t_{n+k}) - y_{n+k}^{[s+1]} = h \ \beta_k \ (f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) - f_{n+k}^{[s]}) + \mathfrak{L}[y(t_n); h],$$

es decir,

$$y(t_{n+k}) - y_{n+k}^{[s+1]} = h \ \beta_k \ \frac{\partial f(t_{n+k}, \eta_{n+k})}{\partial y} [y(t_{n+k}) - y_{n+k}^{[s]}] + \mathfrak{L}[y(t_n); h],$$

para $s = 0, 1, \cdots, m-1$. Es decir, cada vez que se aplica un corrector el e.t.l. multiplica por h el error anterior y añade un término del orden del e.t.l. del corrector, por eso si m fuera grande el error que domina es el del corrector.

Teorema 9.1. *Orden del un método P-C*

1. *Si $p^* \geq p$ el e.t.l. es el del corrector.*
2. *Si $p^* = p - q$ entonces se tienen tres casos*
    a) *Si $m < q$ entonces e.t.l. es $C \cdot h^{p^*+m+1} + \mathbf{O}(h^{p^*+m+2})$.*
    b) *Si $m = q$ entonces e.t.l. mismo orden que el corrector pero diferente.*
    c) *Si $m > q$ entonces e.t.l. es el del corrector..*

Demostración. [4, pag. 89] □

Según este resultado, el caso $p^* > p$ no interesa porque se pierde orden.

Por otra parte el caso $p^* = p$ interesa porque existe una técnica de Milne que permite estimar el error fácilmente. En este caso

$$\begin{aligned} C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(t_n) &= y(t_{n+k}) - y_{n+k}^{[m]} + \mathbf{O}(h^{p+2}), \\ C^*_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(t_n) &= y(t_{n+k}) - y_{n+k}^{[0]} + \mathbf{O}(h^{p+2}), \end{aligned}$$

que al restar queda

$$(C^*_{p+1} - C_{p+1})h^{p+1}y^{(p+1)}(t_n) = y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]} + \mathbf{O}(h^{p+2}).$$

de donde se deduce la estimación del error local del corrector

$$C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(t_n) \approx \frac{C_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}} (y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}).$$

Esta estimación del error se puede utilizar para el paso y lograr que los errores locales sean del orden de una tolerancia. considerando que

$$C_{p+1}y^{(p+1)}(t_n) \approx \frac{1}{h^{p+1}} \frac{C_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}} (y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}),$$

en nuevo paso h_{new} será

$$\mid C_{p+1}\ h_{new}^{p+1}\ y^{(p+1)}(t_n) \mid \ \approx \left(\frac{h_{new}}{h}\right)^{p+1} \left| \frac{C_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}} \right| \mid y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]} \mid \leq \epsilon.$$

Para el predictor también se puede utilizar teniendo en cuenta la aproximación

$$C^*_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(t_n) \approx \frac{C^*_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}} (y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}).$$

La otra utilidad que se le puede dar a estos resultados es la de modificar de las aproximaciones del ambos métodos predictor y corrector. Para el predictor se calcularía

$$\widehat{y}_{n+k}^{[0]} = y_{n+k}^{[0]} + \frac{C^*_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}} (y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}),$$

y para el corrector

$$\widehat{y}_{n+k}^{[m]} = y_{n+k}^{[m]} + \frac{C_{p+1}}{C^*_{p+1} - C_{p+1}} (y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}),$$

que son métodos predictor corrector con modificaciones que se suele indicar con una M, for ejemplo $PM(EC)^m ME$.

9.2. Estabilidad para h fijo de los métodos P-C. En el modelo de corrección hasta la convergencia, las propiedades de estabilidad del para PC serán las del corrector. Como en los métodos anteriores, para estudiar la estabilidad absoluta el método se aplicará al problema linear $f = \lambda \cdot y$ y se usará la notación $\overline{h} = \lambda \cdot h$.

Aquí se estudiará el modelo PECE. Suponiendo que $\widetilde{y}$ denotan soluciones con errores de redondeo, es decir

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^*_j\ \widetilde{y}_{n+j}^{[1]} &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta^*_j\ f(t_{n+j}, \widetilde{y}_{n+j}^{[1]}) + R^*_{n+k}, \\ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\ \widetilde{y}_{n+j}^{[1]} &= h\ \beta_k\ f(t_{n+k}, \widetilde{y}_{n+k}^{[0]}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j\ f_(t_{n+j}, \widetilde{y}_{n+j}^{[1]}) + R_{n+k}, \end{aligned}$$

La solución exacta además verifica

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} \alpha_j^* \; y(t_{n+j}) &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \; f(t_{n+j}, y(t_{n+j}) + d_{n+k}^*, \\ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \; y(t_{n+j}) &= h \sum_{j=0}^{k} \beta_j \; f(t_{n+j}, y(t_{n+j}) + d_{n+k},\end{aligned}$$

donde d_{n+k}^* y d_{n+k} son los e.t.l. respectivos. Definiendo los errores globales

$$\widetilde{e}_n^{[0]} = y(t_n) - \widetilde{y}_n^{[0]}, \qquad \widetilde{e}_n^{[1]} = y(t_n) - \widetilde{y}_n^{[1]},$$

restando las ecuaciones y considerando que $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda$ se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} &= \overline{h} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} + cte, \\ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} &= \overline{h} \; \beta_k \; \widetilde{e}_{n+k}^{[0]} + \overline{h} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]}) + cte,\end{aligned}$$

eliminando $\widetilde{e}_n^{[0]}$ se tiene la ecuación en diferencias

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} - \overline{h} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} = -\overline{h}\beta_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} - \overline{h} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} \right] + cte,$$

Sumado $-\overline{h}\beta_k \widetilde{e}_{n+k}^{[1]}$ y teniendo en cuanta que $\alpha_k^* = 1$ y $\beta_k^* = 0$ se tiene la ecuación en diferencias

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - \overline{h}\beta_j) \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} = -\overline{h}\beta_k \sum_{j=0}^{k} \; (\alpha_j^* - \overline{h}\beta_j^*) \; \widetilde{e}_{n+j}^{[1]} + cte,$$

cuyo polinomio característico es

$$\Pi_{PECE}(r, \overline{h}) = \rho(r) - \overline{h}\sigma(r) + \overline{h}\beta_k \; [\rho^*(r) - \overline{h}\sigma^*(r)]. \tag{9.2}$$

En general se puede demostrar que

$$\Pi_{P(EC)^m E}(r, \overline{h}) = \rho(r) - \overline{h}\sigma(r) + M_m(\overline{h}) \; [\rho^*(r) - \overline{h}\sigma^*(r)].$$

con

$$M_m(\overline{h}) = (\overline{h}\beta_k)^m \; \frac{1 - \overline{h}\beta_k}{1 - (\overline{h}\beta_k)^m}, \quad m = 1, 2, \cdots .$$

El modelo sin evaluación final resulta

$$\Pi_{P(EC)^m}(r, \overline{h}) = \beta_k r^k [\rho(r) - \overline{h}\sigma(r)] + M_m(\overline{h}) \; [\rho^*(r)\sigma(r) - \rho(r)\sigma^*(r)].$$

Observe además, que para la convergencia de la iteración de punto fijo (9.1) se necesita que $|\overline{h}\beta_k| < 1$ por lo que $M_m(\overline{h}) \to 0$ cuando $m \to \infty$ y en tal caso el polinomio de estabilidad que queda es el del método corrector.

Por otra parte, según el teorema 6 en el polinomio de estabilidad de un l.m.m. de orden p existe siempre una raíz

$$r_1 = \exp(\overline{h}) + \mathbf{O}(\overline{h}^{\;p+1}), \quad \text{para} \quad \overline{h} \to 0.$$

porque $\pi(\exp(\overline{h}), \overline{h}) = \mathbf{O}(\overline{h}^{\ p+1})$. Por el mismo argumento

$$\begin{aligned} \rho^*(\exp(\overline{h}) - \overline{h}\sigma^*(\exp(\overline{h}) &= \mathbf{O}(\overline{h}^{\ p+1}), \\ \rho(\exp(\overline{h}) - \overline{h}\sigma(\exp(\overline{h}) &= \mathbf{O}(\overline{h}^{\ p+1}), \end{aligned}$$

que multiplicadas por $\sigma(\exp(\overline{h})$ y $\sigma^*(\exp(\overline{h})$ respectivamente y restadas dan

$$\rho^*(\exp(\overline{h})\sigma(\exp(\overline{h}) - \rho(\exp(\overline{h})\sigma^*(\exp(\overline{h}) = \mathbf{O}(\overline{h}^{\ p+1}),$$

por lo se concluye que

$$\begin{aligned} \Pi_{P(EC)^m E}(\exp(\overline{h}), \overline{h}) &= \mathbf{O}(\overline{h}^{\ p+1}), \\ \Pi_{P(EC)^m}(\exp(\overline{h}), \overline{h}) &= \mathbf{O}(\overline{h}^{\ p+1}), \end{aligned}$$

y por tanto todos los métodos son absolutamente inestable para $0 < \overline{h} \ll 1$.

Referencias

1. G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice Hall, 1974.
2. D.F. Griffiths and D.J. Higham, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Initial Value Problems*, Springer, 2010.
3. E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiif Problems*, Springer, 1987.
4. J.D. Lambert, *Numerical Methods for O.D.E. The Initial Value Problems*, Wiley, 1991.

Departamento de Matemática de la Universidad del Pais Vasco UPV/EHU
Email address: fernando.vadillo@ehu.es