

# UNA INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS ESPECTRALES

F. VADILLO

RESUMEN. En estas notas se hace una breve introducción a los métodos espectrales. Comenzando por un ejemplo sencillo sacado de [3], después se explica el concepto de matriz de diferenciación siguiendo las exposiciones y los ejemplos de [6].

Para los alumnos interesados en conocer mejor estos métodos, además de las referencias anteriores [6] y [3] se recomienda otros clásicos como [4], [2] o la amplia recopilación [1]. Para las implementaciones la mejores referencias son [7] y [5].

## ÍNDICE

1. <a href="#">Introducción</a>	1
2. <a href="#">Algunos ejemplos de matrices de diferenciación</a>	4
3. <a href="#">Matrices de diferenciación de Fourier</a>	7
4. <a href="#">Matrices de diferenciación de Chebyshev</a>	9
5. <a href="#">Series de Chebyshev usando la FFT</a>	11
Referencias	14

## 1. INTRODUCCIÓN

Dada una ecuación diferencial con unas condiciones frontera, la idea de los métodos espectrales consiste en aproximar la solución exacta  $u(x)$  por una suma finita  $v(x) = \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x)$ . Cuando el problema dependiente del tiempo la solución  $u(x, t)$  será aproximada por una  $v(x, t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \phi_k(x)$ .

Para que los métodos espectrales sean útiles en la práctica deberán tener las siguientes propiedades:

1. **Convergencia rápida** de las aproximaciones  $v(x) = \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x)$  a la solución exacta  $u(x)$  al menos cuando las soluciones sean regular.
2. Dados los coeficientes  $a_k$ , los nuevos coeficientes  $b_k$  tales que

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x) \right) = \sum_{k=0}^N b_k \phi_k(x),$$

sean fáciles y rápidos de calcular.

3. Deberá existir algún algoritmo rápido para pasar de los coeficientes  $a_k$  a los valores de  $v(x)$  en algún conjunto de nodos  $x_i, i = 0, \dots, N$  y viceversa.

Las dos cuestiones fundamentales sobre las que se debe decidir para cada problema son las siguientes:

- Se deben elegir las funciones base  $\phi_k(x)$ . La elección básicamente es como sigue:
  - Para problema periódico se aconsejan **funciones trigonométricas**.
  - Problema no periódico se utilizarán **polinomios ortogonales tipo Jacobi**, es decir, polinomios de Chebyshev, Legendre, Hermite ... (ver apéndice A de [3]).
- La segunda cuestión es la que se refiere a cómo determinar los coeficientes  $a_k$  ó  $a_k(t)$ , las principales técnicas son tres:

**Método Tau:** requiere que  $v(x)$  verifica las condiciones frontera del problema y el residuo  $R(x)$  sea ortogonal a tantas funciones base como sea posible. El residuo es lo que queda cuando se sustituye la solución aproximada en la ecuación diferencial original.

**Método Galerkin:** Combina las funciones base en un nuevo conjunto en el que todas las funciones verifique las condiciones frontera y requiere que el residuo  $R(x)$  sea ortogonal a tantas nuevas funciones base como sea posible.

**Método de colocación ó pseudoespectral:** es similar al de Tau pero ahora el residuo se anula en unos puntos concretos.

*Ejemplo 1.1.* Se considera el siguiente problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} u_{xx} + u_x - 2u + 2 = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{cases}$$

de solución exacta

$$u(x) = 1 - \frac{sh(2)e^x + sh(1)e^{-2x}}{sh(3)}.$$

La solución aproximada una serie de Chebyshev truncada

$$v(x) = \sum_{k=0}^4 a_k T_k(x),$$

cuya derivada respecto de  $x$  será

$$v_x(x) = \sum_{k=0}^4 b_k T_k(x).$$

Considerando las relaciones entre las derivadas de los polinomios de Chebyshev se tiene que

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ & 0 & 4 & 0 & 8 \\ & & 0 & 6 & 0 \\ & & & 0 & 8 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

El residuo en este problema resulta

$$R(x) = v_{xx} + v_x - 2v + 2 = \sum_{k=0}^4 r_k T_k(x),$$

con

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = (A^2 + A - 2I) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones frontera son

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el [método de Tau](#) primero se tiene las dos ecuaciones (1.1) correspondientes a las condiciones frontera y después la ortogonalidad del residuo

$$\int_{-1}^1 \frac{R(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{para } k = 0, 1, 2,$$

esto implica que  $r_0 = r_1 = r_2 = 0$ . La solución de este sistema de cinco ecuaciones lineales es

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,2724, \\ a_1 &= -0,0444, \\ a_2 &= -0,2562, \\ a_3 &= 0,0444 \\ a_4 &= -0,0162, \end{aligned}$$

Para el [método de Galerkin](#) además de las condiciones frontera (1.1) las nuevas funciones base son

$$\begin{cases} \phi_2(x) = T_2(x) - T_0(x), \\ \phi_3(x) = T_3(x) - T_1(x), \\ \phi_4(x) = T_4(x) - T_0(x), \end{cases}$$

y la ortogonalidad del residuo ahora significa que

$$\int_{-1}^1 \frac{R(x)\phi_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad k = 2, 3, 4$$

y la solución del sistema lineal es

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,2741, \\ a_1 &= -0,0370, \\ a_2 &= -0,2593, \\ a_3 &= 0,0370, \\ a_4 &= -0,0148, \end{aligned}$$

Finalmente en el [método de colocación](#) el residuo  $R(x)$  debe anularse en los nodos de Chebyshev que son los puntos  $x_i = \cos \frac{i\pi}{4}$   $i = 1, 2, 3$  de donde se obtienen las tres ecuaciones siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que junto con las dos ecuaciones (1.1) dan la solución

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,2743, \\ a_1 &= -0,0371, \\ a_2 &= -0,2600, \\ a_3 &= 0,0371, \\ a_4 &= -0,0143, \end{aligned}$$

En la figura 1 se han representados la solución exacta y las tres aproximaciones, las tres soluciones aproximadas son bastante buenas aunque la aproximación de Tau parece ser algo peor en este caso.

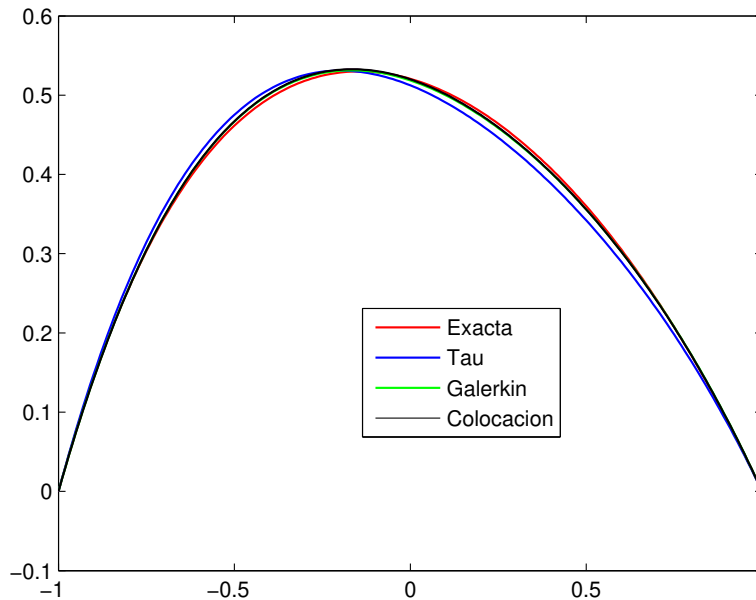


FIGURA 1. Soluciones exactas y aproximadas

## 2. ALGUNOS EJEMPLOS DE MATRICES DE DIFERENCIACIÓN

Se considera una red de puntos equidistantes  $\{x_1, \dots, x_N\}$  con paso  $h = x_j - x_{j-1}$  y se supone que los valores  $\{u_1, \dots, u_N\}$  son conocidos, también se supone que el problema es periódico, es decir,  $u_0 = u_N$  y  $u_1 = u_{N+1}$ . Recuerde que la aproximación en diferencias finitas de segundo orden a la primera derivada es

$$(2.1) \quad u'(x_j) \approx w_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}, \quad j = 1, \dots, N$$

que escrita de manera matricial resulta

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}.$$

Este es el primer ejemplo de lo que se entiende por una **matriz de diferenciación**, se trata de una matriz que multiplicada por los valores de la función en los nodos, el resultado son aproximaciones de la derivada en los mismos puntos. En este caso se trata de **aproximaciones de orden dos**.

Unos cálculos muy sencillos permiten comprobar que el mismo resultado se obtiene en el siguiente problema de interpolación: para cada  $j = 1, \dots, N$

1. Se construye el polinomio  $p_j \in \mathcal{P}_2$  tal que  $p_j(x_{j\pm i}) = u_{j\pm i}$  para  $i = 0, 1$ .
2. Se evalúa la derivada  $w_j = p_j'(x_j)$ .

La aproximación en diferencia de **cuarto orden** se calcula de manera análoga, para cada  $j = 1, \dots, N$

1. Sea calcula  $p_j \in \mathcal{P}_4$  tal que  $p_j(x_{j\pm i}) = u_{j\pm i}$  para  $i = 0, 1, 2$ .
2. Se evalúa la derivada  $w_j = p_j'(x_j)$ .

La expresión matricial ahora es

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} & & \ddots & & & & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \\ & & \ddots & & & & \frac{1}{12} & \\ & & \ddots & -\frac{1}{12} & & & & \frac{1}{12} \\ & & \ddots & \frac{2}{3} & \ddots & & & \\ & & \ddots & 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & -\frac{2}{3} & \ddots & & & \\ -\frac{1}{12} & & & \frac{1}{12} & \ddots & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & & & \ddots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix},$$

donde se tiene otro ejemplo de una matriz de diferenciación y en este caso las aproximaciones son de orden cuatro.

La idea detrás de los métodos pseudoespectrales es, si fuera posible, hacer un paso al límite en este proceso y conseguir matrices de diferenciación con **aproximaciones de orden infinito**. Se verá más adelante que en el límite se obtiene la siguiente matriz



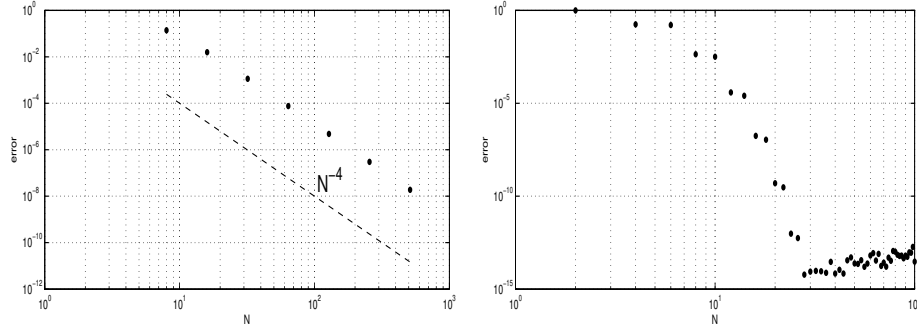


FIGURA 2. Representación de los errores en escala logarítmica

### 3. MATRICES DE DIFERENCIACIÓN DE FOURIER

Considere un problema periódico en  $[0, 2\pi]$  y una red de punto equidistantes de paso  $h = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \frac{\pi}{h} = \frac{N}{2}$  con  $N$  par. Recuerde que la DFT (transformada discreta de Fourier) está definida de la forma siguiente:

$$(3.1) \quad \hat{v}_k = h \sum_{j=1}^N e^{-ikx_j} v_j, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2},$$

y la transformada inversa también llamada síntesis es:

$$(3.2) \quad v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2_1} e^{ikx_j} \hat{v}_k \quad j = 1, \dots, N$$

donde  $\hat{v}_{-N/2} = \hat{v}_{N/2}$  y los términos  $k = \pm N/2$  están multiplicados por  $1/2$ .

Se define el [polinomio interpolador de banda límite](#) de la forma:

$$(3.3) \quad p(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2_1} e^{ikx} \hat{v}_k \quad \forall x \in [0, 2\pi],$$

que es un polinomio trigonométrico de grado a lo más  $N/2$ . El algoritmo para aproximar la derivada llamado [diferenciación espectral](#) es

1. Dado los valores de  $v_j$  se calcula su DFT y se construye el polinomio interpolador de banda límite  $p(x)$ .
2. Se aproxima la derivada  $v'(x_j) \approx p'(x_j)$ .

Para interpolar la función  $v$  se usará una formulación general basada en la función de Kronecker periódica

$$(3.4) \quad \delta_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \pmod{N}, \\ 0, & j \neq 0 \pmod{N}, \end{cases}$$

cuya transformada discreta de Fourier es constante  $\hat{\delta}_k = h \quad \forall k$ . Su polinomio interpolador de banda límites es

$$(3.5) \quad p(x) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{\sin(Nx/2)}{\tan(x/2)} = S_N(x),$$

donde  $S_N(x)$  es la **funci3n sinc** que se escribe como

$$(3.6) \quad S_N(x) = \frac{\sin(\frac{\pi x}{h})}{\frac{2\pi}{h} \tan(\frac{x}{2})}$$

cuya derivada en los nodos resulta

$$(3.7) \quad S'_N(x_j) = \begin{cases} 0, & j = 0 \pmod{N}, \\ \frac{1}{2}(-1)^j \cot(\frac{jh}{2}), & j \neq 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Volviendo al caso general y escribiendo

$$(3.8) \quad v_j = \sum_{m=1}^N v_m \delta_{j-m},$$

el polinomio interpolador será

$$(3.9) \quad p(x) = \sum_{m=1}^N v_m S_N(x - x_m),$$

y su derivada

$$(3.10) \quad p'(x) = \sum_{m=1}^N v_m S'_N(x - x_m).$$

Esto significa que la aproximaci3n de la derivada en el nodo  $x_j$  es

$$(3.11) \quad v'(x_j) \approx p'(x_j) = \sum_{m=1}^N v_m S'_N(x_j - x_m),$$

es decir, la fila  $j$ -ésima de la matriz de diferenciaci3n es

$$(3.12) \quad (S'_N(x_j - x_1), S'_N(x_j - x_2), \dots, S'_N(x_j - x_N)),$$

y la matriz  $N \times N$  de diferenciaci3n que se obtiene es la siguiente

$$(3.13) \quad D_N = \begin{pmatrix} 0 & & & & -\frac{1}{2} \cot \frac{1h}{2} \\ -\frac{1}{2} \cot \frac{1h}{2} & \ddots & & & \frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} & & \ddots & & -\frac{1}{2} \cot \frac{3h}{2} \\ -\frac{1}{2} \cot \frac{3h}{2} & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \frac{1}{2} \cot \frac{1h}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{1h}{2} & & & & 0 \end{pmatrix},$$

que es justamente la expresi3n (2.5).



Para aproximar segundas derivadas de debe derivados dos veces la función sinc con el resultado:

$$(3.14) \quad S''_N(x_j) = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6}, & j = 0 \pmod{N}, \\ -\frac{(-1)^j}{2\sin^2(jh/2)}, & j \neq 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

y la matriz de diferenciación para la aproximar la segunda derivada que se obtiene es:

$$(3.15) \quad D_N^{(2)} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -\frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{2h}{2}\right) & & & & \\ & & \frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{1h}{2}\right) & & & & \\ & & -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6} & & & & \\ & & \frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{1h}{2}\right) & & \ddots & & \\ & & -\frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{2h}{2}\right) & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

En el programa `p4.m` de [6] se estiman las derivadas de las funciones:

$$(3.16) \quad f(x) = \max\{0, 1 - \frac{|x - \pi|}{2}\}, \quad g(x) = e^{\sin x},$$

con el resultado de la figura 3.

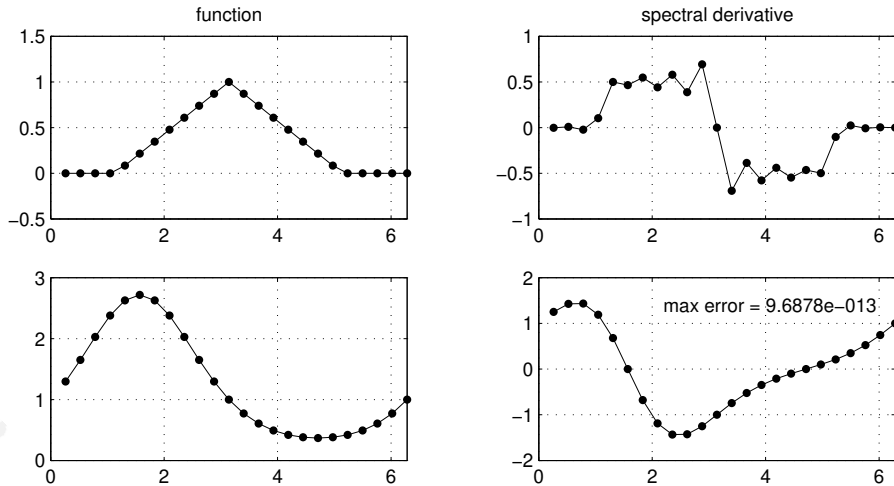


FIGURA 3.

#### 4. MATRICES DE DIFERENCIACIÓN DE CHEBYSHEV

Considere ahora el caso de un problema no periódico en un dominio acotado  $[-1, 1]$ . La teoría de interpolación demuestra que para los nodos equidistantes  $x_j = -1 + \frac{2j}{N}$   $j = 0, \dots, N$  el polinomio de interpolación diverge debido al efecto

**Runge** que se muestra en la parte izquierda de la figura 4. Además, esa misma teoría de interpolación demuestra que la mejor elección de son los **nodos de Chebyshev**:  $x_j = \cos \frac{j\pi}{N}$   $j = 0, \dots, N$  (capítulo 3 de [3]). Con estos nuevos nodos el polinomio interpolar obtiene la parte derecha de la figura 4.

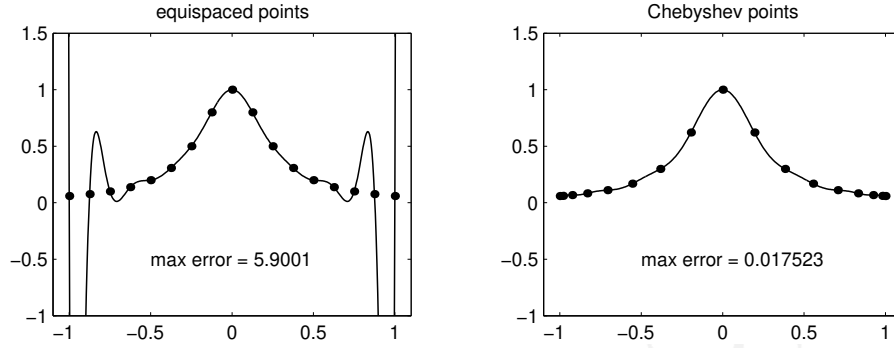


FIGURA 4. Efecto Runge para  $u(x) = \frac{1}{1+16x^2}$  con  $N = 16$

La idea repite los argumentos anteriores para los nuevos nodos de Chebyshev, es decir, dada una función  $v$  en dichos nodos,

1. Se construye el polinomio interpolador tal que  $p(x_j) = v_j$  para  $j = 0, \dots, N$ .
2. Las aproximaciones espectrales de la derivada en los nodos son  $w_j = p'(x_j)$ ,

que escrito de forma matricial es

$$(4.1) \quad \mathbf{w} = D_N \mathbf{v}$$

donde  $D_N$  es **matriz de diferenciación de Chebyshev** cuyos elementos son

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (D_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6},$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i(-1)^{i+j}}{c_j(x_i - x_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, N,$$

donde

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0, N, \\ 1 & \text{otros.} \end{cases}$$

El programa `cheb.m` de [6] construye las matrices de diferenciación de Chebyshev para cualquier  $N$ , y en el programa `p12.m` aplica dichas matrices para estimar la derivadas de distintas funciones con el resultado de la figura 5.

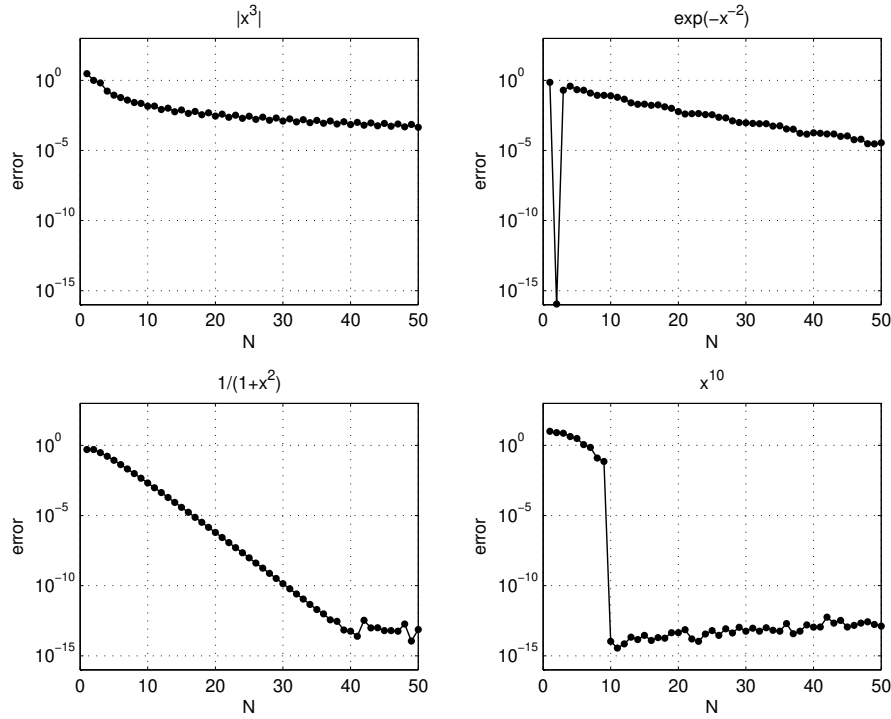


FIGURA 5. Estimaciones de la derivada espectral con Chebyshev

### 5. SERIES DE CHEBYSHEV USANDO LA FFT

En los métodos pseudoespectrales para estimar una derivada se debe multiplicar la matrix de diferenciación por el vector de los valores de la función en los nodos, esto necesita del orden de  $N^2$  productos, aunque como ya se conoce con los polinomios de Fourier al utilizar su FFF este coste se reduce a  $N \lg(N)$ . En esta sección se tratará de aprovechar esta importante rebaja en el caso de los polinomios de Chebyshev.

Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = 1$ , su parte real

$$x = \mathbf{Re}z = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \cos \theta \quad \in [-1, 1],$$

donde  $\theta$  es el argumento de  $z$ .

El  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev está definido de la forma

$$(5.1) \quad T_n(x) = \mathbf{Re}(z^n) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) = \cos(n\theta),$$

donde no parece obvio que se trate de un polinomio de orden  $n$ . Sin embargo, si se realizan los cálculos resulta que

$$\begin{aligned}\mathbf{Re}(z^0) = 1 &\Rightarrow T_0(x) = 1, \\ \mathbf{Re}(z^1) = \frac{1}{2}(z^1 + z^{-1}) &\Rightarrow T_1(x) = x, \\ \mathbf{Re}(z^2) = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2}) = \frac{1}{2}(z^1 + z^{-1})^2 - 1 &\Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ \mathbf{Re}(z^3) = \frac{1}{2}(z^3 + z^{-3}) = \frac{1}{2}(z^1 + z^{-1})^3 - \frac{3}{2}(z^1 + z^{-1}) &\Rightarrow T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ \dots &\end{aligned}$$

en general se tiene la recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

En un apéndice de [3] se recogen las propiedades más importantes de los polinomios de Chebyshev.

Dado entonces un polinomio cualquiera  $p(x)$  de grado  $N$ , se puede expresar de la forma

$$p(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad \forall x \in [-1, 1],$$

que en la variable  $\theta$  será un polinomio trigonométrico de periodo  $2\pi$

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Entonces si  $p(x)$  interpola una función  $f(x)$  en los nodos de Chebyshev  $x_j = \cos \frac{j\pi}{N}$ ,  $P(\theta)$  interpolará la función  $F(\theta) = f(\cos \theta)$  en los nodos equidistantes  $\theta_j = \frac{j\pi}{N}$  para  $j = 0, \dots, N$  donde se puede aplicar la FFT.

Cuando se calcula la primera derivada:

$$p'(x) = \frac{P'(\theta)}{dx/d\theta} = \frac{P'(\theta)}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sum_{n=0}^N n a_n \sin n\theta}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Esta expresión permite obtener las  $p'(x_j)$  en función de los  $P'(\theta_j)$  excepto para  $x = \pm 1$  donde se debe aplicar la regla de L'Hôpital con el siguiente resultado:

$$p'(1) = \sum_{n=0}^N n^2 a_n, \quad p'(-1) = \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} n^2 a_n.$$

En conclusión, el [algoritmo de diferenciación espectral de Chebyshev via FFT](#) sería el siguiente:

1. Dados los valores  $v_0, \dots, v_N$  en los nodos de Chebyshev, los extendemos a un vector  $\mathbf{V}$  de longitud  $2N$  de forma para, es decir,  $V_{2N-j} = v_j$  para  $j = 1, 2, \dots, N$ .
2. Se utiliza la FFT para calcular

$$\widehat{V}_k = \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{-ik\theta_j} V_j, \quad k = -N+1, \dots, N.$$

3. Se estima los  $\widehat{W}_k = ik\widehat{V}_k$  menos  $\widehat{W}_N = 0$ .

4. Utilizando otra vez la FFT se realiza la síntesis

$$W_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^N e^{ik\theta_j} \widehat{W}_k, \quad j = 0, \dots, 2N - 1.$$

5. Finalmente se calculan las aproximaciones de la derivadas en los nodos de Chebyshev

$$w_j = -\frac{W_j}{\sqrt{1-x_j^2}}, \quad j = 1, \dots, N,$$

con las fórmulas especiales para los extremos

$$w_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N n^2 \widehat{v}_n, \quad w_N = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} n^2 \widehat{v}_n,$$

con los términos en 0 y  $N$  multiplicados por  $\frac{1}{2}$ .

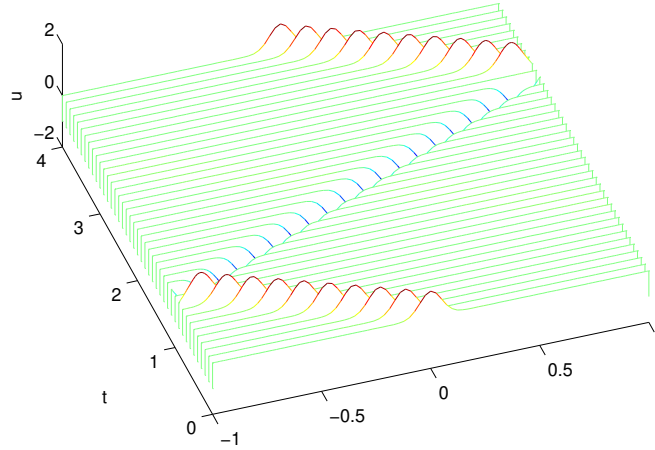


FIGURA 6.

En el programa `chebff.m` de [6] se ha implementado este algoritmo, y en `p18.m` se ha utilizado para obtener estimaciones de la derivada de la función  $e^x \sin(5x)$  para  $N = 10, 20$ .

Para conocer cómo trabaja este método para EDP, en el programa `p19.m` se considera la ecuación de ondas:

$$(5.2) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(\pm 1) = 0.$$

Para avanzar en tiempo se ha utilizado un método leap-frog y `chebff` para estimar las derivadas en  $x$ . La condición inicial es  $u(x, 0) = e^{-200x^2}$ . El resultado de la integración numérica puede apreciarse en la figura 6.

En el segundo ejemplo del programa p20.m se considera la ecuación de ondas en dos dimensiones espaciales:

$$(5.3) \quad u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad -1 < x, y < 1, \quad t > 0, \quad u = 0 \quad \text{sobre la frontera,}$$

con los datos iniciales:

$$(5.4) \quad u(x, y, 0) = e^{-40((x-0.4)^2 + y^2)}, \quad u_t(x, y, 0) = 0.$$

Para avanzar en el tiempo se utiliza nuevamente un leap-frog y la `fft` para aproximar las derivadas en  $x$  e  $y$ . La figura 7 dibuja como evoluciona la solución con el paso del tiempo.

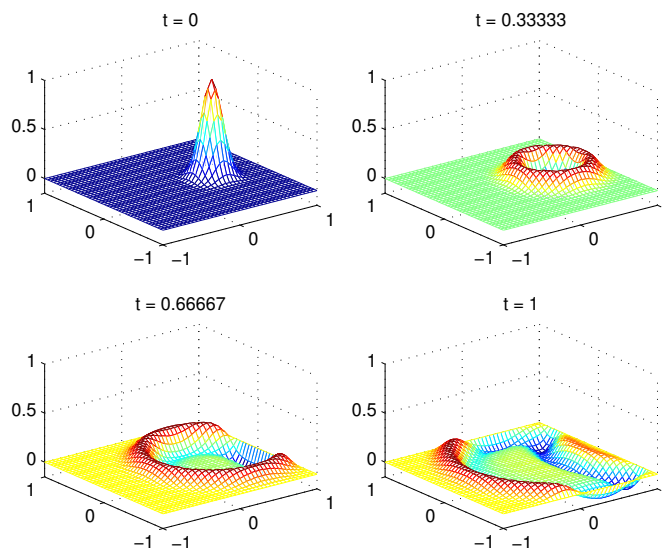


FIGURA 7.

#### REFERENCIAS

1. J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Second Edition*, Dover, 2001.
2. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, 1988.
3. B. Fornberg, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, 1998.
4. D. Gottfried and S.A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods. Theory and Applications*, SIAM, 1977.
5. D.A. Kopriva, *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations*, Springer, 2009.
6. L.N. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, 2000.
7. J.A.C. Weideman, *A MATLAB Differential Matrix Suite*, <http://dip.sun.ac.za/~weideman/>.

DEP. MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA E I.O. DE LA UPV/EHU.  
 Email address: fernando.vadillo@ehu.es