

# MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS PARA PROBLEMAS HIPERBÓLICOS

F. VADILLO

RESUMEN. En esta lección se estudian las ecuaciones hiperbólicas y su resolución numérico con esquemas en diferencias. Se comienza con la ecuación de ondas de primer orden para después pasar a los sistema hiperbólicos con una atención especial a la ecuación de ondas de segundo orden.

## ÍNDICE

1. E.D.P. de primer orden	1
2. La ecuación de ondas de orden uno	3
3. Métodos en diferencias para EDP de primer orden	6
4. Sistemas hiperbólicos	8
5. La ecuación de ondas de segundo orden	9
6. Métodos en diferencias	12
Referencias	13

## 1. E.D.P. DE PRIMER ORDEN

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden en el plano es una expresión del tipo:

$$(1.1) \quad F(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0.$$

En particular la ecuación es **lineal** si se expresa en la forma:

$$(1.2) \quad a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = c(x, t)u + d(x, t).$$

Aunque existen técnicas analíticas que resuelven la ecuación de primer orden general, sin embargo por sencillez, aquí se considerará el caso cuasilineal porque la técnica es mas fácil de comprender.

La técnica que se explicará a continuación reduce la ecuación en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias; sistema que en casos sencillos se puede resolver por técnicas analíticas o por técnicas numéricas en casos más complicados en el conocido como **métodos de las características**.

El problema que se considera es el siguiente:

Halle la función  $u(x, t)$  que verifique la ecuación **cuasilineal**:

$$(1.3) \quad P(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = R(x, t, u),$$

cuya gráfica contenga una curva dada:

$$(1.4) \quad \gamma \equiv \begin{cases} x = x_0(s), \\ t = t_0(s), \\ u = u_0(s) \end{cases}$$

para  $s \in (s_0, s_1)$ .

Si se considera el campo de vectores:

$$(1.5) \quad \mathbf{v}(x, t, u) = P(x, t, u)\mathbf{i} + Q(x, t, u)\mathbf{j} + R(x, t, u)\mathbf{k},$$

y el vector normal a la superficie  $u = u(x, t)$  es:

$$(1.6) \quad \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial t}\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

y la ecuación (refe:cuasilineal) se puede escribir como:

$$(1.7) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

es decir, **el campo de vectores  $\mathbf{v}$  es tangente a la gráfica de la función  $u$  en cada punto**. En consecuencia se puede construir la superficie solución con las curvas que salen de la curva inicial  $\gamma$  siguiendo la dirección del campo  $\mathbf{v}$ . Por cada punto de la curva inicial  $(x_0(s), t_0(s), u_0(s))$  se construye una nueva curva, llamada línea de campo que resuelva el **sistema característico** :

$$(1.8) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dr} = P(x, t, u), \\ \frac{dt}{dr} = Q(x, t, u), \\ \frac{du}{dr} = R(x, t, u), \end{cases}$$

con la condición inicial  $(x_0(s), t_0(s), u_0(s))$  en  $r = 0$ .

La solución parametrizada:

$$(1.9) \quad \begin{cases} x = x(s, r), \\ t = t(s, r), \\ u = u(s, r), \end{cases}$$

es una **superficie integral** del campo asociado a la ecuación y su proyección sobre el plano OXT es una **curva característica de la ecuación**.

Para que las ecuaciones parametrizadas definan una superficie regular es necesario que la curva inicial  $\gamma$  no sea una curva característica de la ecuación porque en tal caso nunca nos moveríamos de ella, es necesario entonces que el dato inicial verifique una **condición de transversalidad** para que los vectores tangentes no tengan la misma dirección que es la siguiente:

$$(1.10) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P & Q & R \\ \frac{dx_0}{ds} & \frac{dt_0}{ds} & \frac{du_0}{ds} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

*Ejemplo* 1.1. Halle la solución de la ecuación:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{3}u,$$

que contiene la curva intersección de las superficies:  $t = u^3, t > 0, x = 1$ .

El sistema característico es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dr} = x, \\ \frac{dt}{dr} = t, \\ \frac{du}{dr} = \frac{2}{3}u, \end{cases}$$

y la condición inicial: para  $r = 0, x = 1, t = s^3, u = s$ .

Es muy sencillo comprobar que se verifica la condición de transversalidad. Integrando las ecuaciones lineales y desacopladas se obtiene la superficie integral:

$$\begin{cases} x(s, r) = e^r, \\ t(s, r) = s^3 e^r, \\ u(s, r) = s e^{\frac{2r}{3}}, \end{cases}$$

y despejando finalmente  $s$  y  $r$  en función de  $x$  y  $t$  se llega a la solución:

$$u = (xt)^{\frac{1}{3}}.$$

Evidentemente, este método calcula la superficie integral pero no garantiza que exista una solución de la ecuación en derivadas parciales porque puede resultar imposible despejar los parámetros  $s$  y  $r$  en función de las variables  $x$  y  $t$  para calcular  $u(x, t)$ .

## 2. LA ECUACIÓN DE ONDAS DE ORDEN UNO

Las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden que habitualmente aparecen en las aplicaciones están relacionadas con **leyes de conservación** de cantidades físicas. Son sistemas de E.D.P. (generalmente no lineales) que dependen del tiempo y en el caso de una dimensión espacial tiene la forma:

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) = 0,$$

donde  $\mathbf{u}$  es un **vector  $m$ -dimensional de cantidades conservadas**, tales como masas, momentos, energías,... y  $\mathbf{f}$  es la **función flujo** del sistema.

El problema más sencillo es el problema de Cauchy de valores iniciales puro en que la ecuación se considera para  $-\infty < x < \infty, t > 0$  y se especifica una condición inicial:

$$(2.2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

*Ejemplo* 2.1. Suponga una tubería muy estrecha llena de un gas de densidad  $\rho(x, t)$  que se mueve a una velocidad  $v(x, t)$  constantes para cada sección de la tubería. La masa de gas entre dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  en un instante  $t$  será:

$$\text{masa en } [x_1, x_2] \text{ en el tiempo } t = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx.$$

Por otra parte, el flujo de gas que atraviesa la sección en  $(x, t)$  es:

$$\text{flujo en } (x, t) = \rho(x, t)v(x, t).$$

Entonces la variación de la masa en  $[x_1, x_2]$  es el flujo entrante menos el saliente, es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t),$$

que será la [forma integral de la ley de conservación de la masa](#).

Para obtener la [forma diferencial de la ley de conservación de la masa](#), se debe suponer que las funciones  $\rho(x, t)$  y  $v(x, t)$  son diferenciables, entonces:

$$\rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx,$$

que llevada a la expresión anterior finalmente resulta:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0.$$

Esta ecuación se puede resolver si se conoce la velocidad  $v$  porque entonces  $\rho v = f(\rho)$  y tiene la forma de la expresión general (2.1). Se trata de un ejemplo sencillo de una ecuación de [convección](#) que representa el transporte de la masa a través del espacio por el movimiento del medio.

Cuando la velocidad es constante  $v(x, t) = a$  la ecuación que queda es:

$$\rho_t + a\rho_x = 0,$$

llamada ecuación de convección lineal o también ecuación de ondas de primer orden.

La [ecuación de ondas de primer orden](#) ahora se escribirá como:

$$(2.3) \quad u_t + au_x = 0.$$

El problema de Cauchy está definido por la ecuación en  $-\infty < x < \infty, t \geq 0$  con una condición inicial:

$$(2.4) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

El sistema característico es:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dr} = a, \\ \frac{dt}{dr} = 1, \\ \frac{du}{dr} = 0, \end{cases}$$

con la condición inicial de que en  $r = 0, t = 0, x = x_0, u = u_0(x_0)$ .

La solución que resulta es:

$$(2.6) \quad u(x, t) = u_0(x - at),$$

para todo  $t \geq 0$ . Cuando el tiempo avanza, el dato inicial simplemente se desplaza con una velocidad  $a$ , hacia la derecha si  $a > 0$  y hacia la izquierda cuando  $a < 0$ . Además, la solución es constante a lo largo de sus rectas característica  $x - at = cte$ .

El programa [wvmovie.m](#) de la referencia [1] permite observar la evolución de las ondas. Si teclea en la ventana de comandos de MATLAB el nombre [wvmovie](#) se abrirá una ventana como la de la figura 1 donde se puede observa la evolución de la onda que se elija.

Otros programas del mismo autor son: [wvsurf.m](#) que dibuja la superficie  $u(x, t)$  en el plano  $xtu$  y el programa [wvslice.m](#) dibuja la función en distintos tiempos.

La ecuación de convección con el [coeficiente variable](#):

$$(2.7) \quad u_t + (a(x)u)_x = 0,$$

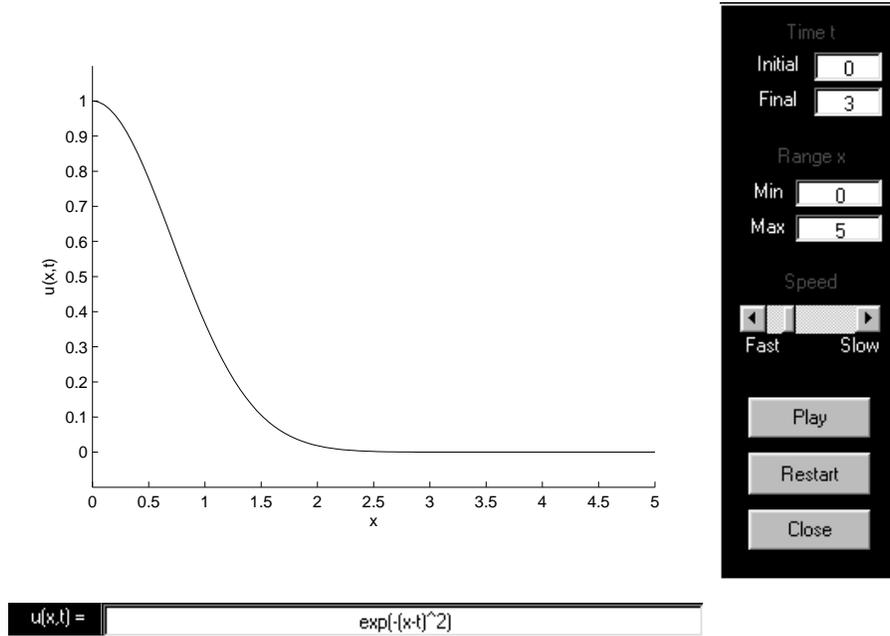


FIGURA 1. Ventana del programa wvmovie

donde  $a(x)$  es una función regular, se puede escribir de la forma:

$$(2.8) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + a(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = -a'(x)u(x, t),$$

de donde se deduce que la evolución de  $u$  a lo largo de las curvas características:

$$(2.9) \quad \begin{cases} x'(t) = a(x(t)), \\ x(0) = a_0, \end{cases}$$

satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} u(x(t), t) = -a'(x(t))u(x(t), t).$$

Por lo tanto, en este caso la solución no es constante a lo largo de las características pero el problema se reduce a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

La E.D.P. de primer orden no lineal de tipo conservativo (2.1) más famosa es cuando la función  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  llamada **ecuación de ondas no lineal** o también **ecuación de Burgers sin viscosidad**:

$$(2.11) \quad u_t + uu_x = 0.$$

Para la condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  y usando el sistema característico se obtiene la solución exacta:

$$(2.12) \quad u(x, t) = u_0(x - tu(x, t)),$$

en la que no es posible, en general, despejar la incógnita  $u$ , haría falta utilizar el teorema de la función implícita.

*Ejemplo 2.2.* Cuando  $u_0(x) = -x$  la solución es:

$$(2.13) \quad u(x, t) = \frac{-x}{1-t},$$

que explota en  $t = 1$ . Las curvas características  $x(t) = (1-t)x(0)$  confluyen en el punto  $(0, 1)$  como se puede apreciar en la figura 2 y en  $t = 1$  tiene lugar un **shock** porque como la solución es constante a lo largo de las curvas características, en  $t = 1$  la solución debiera tomar todos los valores iniciales cosa que evidentemente es imposible.

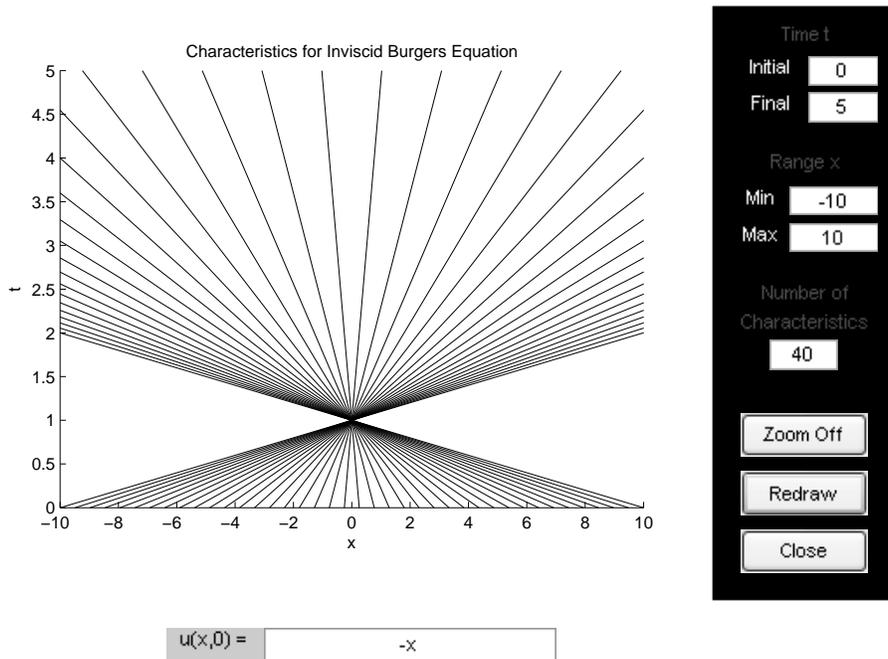


FIGURA 2. Característica de la ecuación de Burger para  $u_0(x) = -x$

### 3. MÉTODOS EN DIFERENCIAS PARA EDP DE PRIMER ORDEN

La teoría de los métodos en diferencias para la ecuación de ondas lineal (2.3) con una condición inicial (2.4) apenas presenta novedades respecto a lo que ya se hizo para la ecuación del calor, razón por la cual se hará con mayor brevedad. La idea general sigue la teoría desarrollada para los problemas parabólicos. Para demostrar la convergencia de un esquema en diferencias se utiliza el teorema de Lax, es decir, se demuestra la consistencia con el problema y después se estudia su condición de estabilidad numérica.

Sean entonces  $h$  y  $k$  los pasos en  $x$  y  $t$  respectivamente, suponiendo en primer lugar que  $a > 0$ , es decir, las pendientes de las rectas características son positiva; el llamado método lateral izquierdo es ahora el **método upwind**:

$$(3.1) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda a (U_j^n - U_{j-1}^n).$$

donde  $\lambda = \frac{k}{h}$ . Suponiendo que  $u$  es suficientemente diferenciable y utilizando desarrollos de Taylor, el e.t.l. que resulta es:

$$(3.2) \quad T_{hk} = c_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d_{hk} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathbf{O}(k^3) + \mathbf{O}(h^3),$$

donde:

$$(3.3) \quad c_{hk} = \frac{a}{2}(ak - h), \quad d_{hk} = \frac{a}{6}(h^2 - a^2 k^2),$$

son respectivamente los **coeficientes de disipación y dispersión** del método. En este caso si  $\frac{k}{h} = \frac{1}{a}$  ambos coeficientes se anulan y el método es de orden dos.

Para estudiar la estabilidad se sustituye en el esquema en diferencias  $U_j^n = g^n e^{i\xi j h}$  para obtener el factor de amplificación que resulta:

$$(3.4) \quad g(\xi) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{i\xi h},$$

cuyo módulo al cuadrado es:

$$(3.5) \quad |g(\xi)|^2 = 1 - 2a\lambda(1 - a\lambda)(1 - \cos \xi h) \leq 1,$$

para  $a\lambda \leq 1$  que será por tanto la condición de estabilidad de este método.

Cuando  $c_{hk} \neq 0$  la llamada **ecuación modificada** del método es:

$$(3.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + c_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d_{hk} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

que tiene un término de difusión no nulo. Esto provocará un efecto difusivo en el esquema numérico que aproximará mejor la ecuación modificada que la original, es decir, **los términos espurios de difusión provocan que las soluciones numéricas correspondan a una ecuación de difusión y no de convección**.

Para evitar este problema se pueden introducir en el esquema numérico **términos de difusión artificiales** como se verá en el siguiente ejemplo.

Se considera el método en diferencias progresivo en tiempo y central en espacio, es decir:

$$(3.7) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a}{2}\lambda(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

cuyo e.t.l. es:

$$(3.8) \quad T_{hk} = \frac{k^2 a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{k^3 a^3}{6} + \frac{a\lambda h^3}{6} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathbf{O}(k^4) + \mathbf{O}(h^4).$$

Si ahora se suma en el esquema una aproximación del término de difusión resulta el llamado **método de Lax-Wendroff**:

$$(3.9) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a}{2}\lambda(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{a^2}{2}\lambda^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

cuyo coeficiente de difusión es cero y por tanto evitará las difusiones en las aproximaciones numéricas. Se trata de un método de orden dos y su factor de amplificación es:

$$(3.10) \quad g(\xi) = 1 + ia\lambda \sin \xi h - 2a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2},$$

cuyo modulo cuadrado es:

$$(3.11) \quad |g(\xi)|^2 = 1 + 4(a^4 \lambda^4 - a^2 \lambda^2) \sin^4 \frac{\xi h}{2} \leq 1,$$

cuando  $|a|\lambda \leq 1$ .

A esta misma condición llegaron en 1928 Courant, Friedrichs y Lewy por un razonamiento geométrico comparando los dominios de dependencia de la ecuación diferencial y su discretización numérica.

Dado un punto de la red  $(x_j, t^n)$  el valor de la solución exacta de (2.3) en dicho punto  $u(x_j, t^n) = u_0(x_j - at^n)$  donde  $x_j - at^n$  es la intersección con el eje OX de la característica  $x - x_j = a(t - t^n)$  que pasa por el punto, entonces si la curvas características, en este caso recta, no están contenida en el dominio de dependencia del esquema, podríamos cambiar el dato inicial para modificar la solución exacta pero el esquema no se enteraría, razón por lo cual no podría haber convergencia pero como el esquema es consistente lo que se hubiera perdido es la estabilidad.

Como  $\lambda = \frac{k}{h}$  es constante el dominio de dependencia del punto  $(x_j, t^n)$  en el esquema no cambia y su intersección con el eje OX es el intervalo  $[x_j - \frac{1}{\lambda}t^n, x_j + \frac{1}{\lambda}t^n]$ . En consecuencia para que:

$$(3.12) \quad x_j - at^n \in [x_j - \frac{1}{\lambda}t^n, x_j + \frac{1}{\lambda}t^n],$$

la condición que de cumplirse es que  $|a| \leq \frac{1}{\lambda}$  lo cual equivale a escribir que  $|a|\lambda \leq 1$  que es la denominada **condición CFL** del método numérico, condición necesaria para la estabilidad de todo esquema explícito.

#### 4. SISTEMAS HIPERBÓLICOS

Una generalización de la de la ecuación de ondas  $u_t + au_x = b$  se obtiene cuando se escribe el sistema vectorial:

$$(4.1) \quad \mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x = \mathbf{b},$$

donde  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  v  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  son vectores  $m$ -dimensional y  $A(x, t)$  una matriz  $m \times m$ . Evidentemente la naturaleza de la ecuación dependerá del tipo de matriz.

Cuando la matriz  $A$  es constante se dice que es **hiperbólico** si dicha matriz es diagonalizable, es decir, existe una matriz  $P$  no singular tal que:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = P^{-1}AP,$$

donde los  $\lambda_j$  son los autovalores de  $A$ . Como  $A = P\Lambda P^{-1}$  introduciendo esta expresión en el sistema se tiene:

$$\mathbf{u}_t + P\Lambda P^{-1}\mathbf{u}_x = \mathbf{b},$$

que se puede escribir como:

$$(P^{-1}\mathbf{u})_t + \Lambda(P^{-1}\mathbf{u})_x = P^{-1}\mathbf{b},$$

y haciendo el cambio de variable  $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{u}$  se llega al sistema de  $m$  ecuaciones desacopladas:

$$(4.2) \quad (v_j)_t + \lambda_j(v_j)_x = (P^{-1}\mathbf{b})_j,$$

de soluciones exactas  $v_j(x, t) = (P^{-1}\mathbf{u}_0)_j(x - \lambda_j t)$  para  $j = 1, \dots, m$ .

El caso más interesante de los sistemas hiperbólicos es cuando  $m = 2$  y la matriz:

$$(4.3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si se expresa la ecuación vectorial por componentes se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Derivando la primera ecuación respecto de  $t$  y la segunda respecto de  $x$  resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= 0,\end{aligned}$$

que sumadas dan:

$$(4.4) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0,$$

que es la conocida como **ecuación de ondas de orden dos** que se estudiará en la siguiente sección .

Para discretizar los sistemas hiperbólicos se utilizan las misma ideas desarrolladas para las ecuaciones escalar aunque, como es natural, aparecen algunas dificultades debidas al aumento en la dimensión. Por ejemplo, se pueden escribir versiones vectorial de los métodos upwind, Lax-Wendroff... ( ver tabla 10.1 de [2]).

## 5. LA ECUACIÓN DE ONDAS DE SEGUNDO ORDEN

El problema de Cauchy de la ecuación de ondas de segundo orden de velocidad  $c$  es:

$$(5.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cuya solución exacta se puede calcular de forma explícita. En efecto, es fácil comprobar que la solución es la famosa **fórmula d'Alembert**:

$$(5.2) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds,$$

que también conviene escribir como suma de dos ondas viajeras de velocidades  $\pm c$ :

$$(5.3) \quad u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct),$$

donde:

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\sigma) d\sigma, \\ G(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_x^0 \psi(\sigma) d\sigma.\end{aligned}$$

Las rectas  $x \pm ct = cte$  son las rectas características de la ecuación.

La fórmula de d'Alembert para la solución exacta permite deducir algunas propiedades importante de la ecuación de ondas:

1. **Velocidad finita de propagación**: la solución en cada punto del plano  $(x, t)$  depende exclusivamente de los datos iniciales en el intervalo de dependencia  $[x - ct, x + ct]$ .

2. **No hay efecto regularizante:** la solución  $u$  es tan regular como la posición inicial  $\varphi$  y gana una derivada respecto a la velocidad inicial  $\psi$ .
3. **Conserva la energía:** la energía del sistema que se define de la forma:

$$(5.4) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [|u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2] dx,$$

verifica que:

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Esta ley de conservación sugiere que el si  $(\varphi, \psi) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$  entonces la solución  $u \in C([0, \infty); H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, \infty); L^2(\mathbb{R}))$  lo que indica que se preserva la regularidad en los datos iniciales.

Para un modelo simplificado de las vibraciones de una cuerda de longitud  $\pi$  se tiene **la ecuación de ondas en un intervalo acotado** :

$$(5.5) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

donde se han impuesto condicione de contorno de Dirichlet que indican que la cuerda está fijada en los extremos.

El método de separación de variables permite escribir la solución en serie de Fourier. Si los datos iniciales admiten un desarrollo en serie de Fourier:

$$\varphi(x) = \sum_{l \geq 1} \hat{\varphi}_l w_l(x), \quad \psi(x) = \sum_{l \geq 1} \hat{\psi}_l w_l(x), \quad 0 < x < \pi,$$

donde  $w_l(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(lx)$ , la solución se escribe de la forma:

$$(5.6) \quad u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \left( \hat{\varphi}_l \cos(lt) + \frac{\hat{\psi}_l}{l} \sin(lt) \right) w_l(x).$$

Nuevamente la energía de la solución que es:

$$(5.7) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [|u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2] dx.$$

se conserva, y el espacio natural para resolver el problema es  $H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$ .

El programa **vwstring.m** de [1] dibuja la solución de d'Alembert para diferentes valores iniciales y condiciones de contorno.

Discretizando la variable  $x$  con un paso  $h = \frac{\pi}{M+1}$  y utilizando la clásica aproximación de tres puntos para la segunda derivada se obtiene el **sistema semi-discreto** de  $M$  ecuaciones diferenciales ordinarias lineales:

$$(5.8) \quad \begin{cases} u_j''(t) - c^2 \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} = 0, & t > 0 \\ u_j(0) = \varphi_j, \\ u_j'(0) = \psi_j, \\ u_0(t) = u_{M+1}(t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

para  $j = 1, \dots, M$  y que en notación vectorial se puede escribirse en la forma:

$$(5.9) \quad \begin{cases} \mathbf{u}''(t) - A_h \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}(0) = \varphi, \\ \mathbf{u}'(0) = \psi. \end{cases}$$

donde:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix}, \quad A_h = \frac{c^2}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Considerando ahora el problema de autovalores:

$$-A_h \mathbf{W} = \lambda \mathbf{W},$$

las soluciones son:

$$\lambda_l(h) = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \left( l \frac{h}{2} \right),$$

y los autovectores asociados:

$$\mathbf{W}_l(h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} \sin(lx_1) \\ \vdots \\ \sin(lx_M) \end{pmatrix},$$

para  $j = 1, \dots, M$ , y por tanto se concluye que **cuando  $h \rightarrow 0$  los autovalores y autovectores del problema semi-discreto convergen a los autovalores y autovectores del problema continuo.**

La solución del problema semi-discreto también se puede desarrollar en serie de Fourier. Suponiendo que los datos iniciales admiten los desarrollos en serie de Fourier siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{l=1}^M \hat{\varphi}_l(h) \mathbf{W}_l(h), \\ \psi &= \sum_{l=1}^M \hat{\psi}_l(h) \mathbf{W}_l(h), \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_l(h) &= \langle \varphi, \mathbf{W}(h) \rangle_h, \\ \hat{\psi}_l(h) &= \langle \psi, \mathbf{W}(h) \rangle_h \end{aligned}$$

en donde  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle_h = h \sum_{j=1}^M e_j f_j$ ; la solución del método semi-discreta que resulta es:

$$(5.10) \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{l=1}^M \left( \hat{\varphi}_l(h) \cos(\mu_l(h)t) + \frac{\hat{\psi}_l(h)}{\mu_l(h)} \sin(\mu_l(h)t) \right) \mathbf{W}_l(x),$$

donde  $\mu_l(h) = \sqrt{\lambda_l(h)}$ .

También se puede definir una versión discreta de la energía de la forma:

$$(5.11) \quad E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^M \left[ \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 + |u'_j|^2 \right],$$

que naturalmente es conservada, es decir,  $\frac{dE_h}{dt} = 0$ . La conclusión final a la que se llega es que el **sistema semi-discreto es una aproximación natural del sistema continuo y se trata de un método consistente de orden dos.**

Para estudiar su estabilidad se puede hacer un análisis de Von Neumann insertando  $u_j(t) = g(t)e^{i\xi jh}$  en la fórmula del método obteniéndose la ecuación diferencial de segundo orden:

$$g''(t) + 4\frac{c^2}{h^2} \sin^2 \frac{\xi h}{2} g(t) = 0,$$

que multiplicada por  $g'(t)$  se expresa de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} |g'(t)|^2 + 2\frac{c^2}{h^2} \sin^2 \frac{\xi h}{2} |g(t)|^2 \right] = 0,$$

que garantiza la estabilidad del método.

## 6. MÉTODOS EN DIFERENCIAS

El esquema completamente discreto más utilizado para aproximar numéricamente la ecuación de ondas de segundo orden es el llamado **método leap-frog**:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \\ U_j^0 = \varphi_j, \\ U_0^n = U_{M+1}^n = 0, \end{cases},$$

para  $j = 1, \dots, M$  y  $n \geq 0$ . Como se trata de un esquema de tres niveles, para comenzar es imprescindible conocer los  $U_j^0 = \varphi_j$  y los  $U_j^1$  que de momento se desconocen, lo natural es utilizar el dato inicial de la derivada y tomar:

$$(6.2) \quad U_j^1 = \varphi_j + k\psi_j,$$

porque se trata de una aproximación de orden dos como lo es también el método.

Este método explícito se puede reescribir de forma más cómoda como:

$$(6.3) \quad U_j^{n+1} = (2 - 2\lambda^2)U_j^n + \lambda^2(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - U_j^{n-1},$$

con  $\lambda = c\frac{k}{h}$ . Evidentemente es un método consistente de orden dos, y para la estabilidad se puede utilizar el método de Von Neumann insertando la solución  $U_j^n = g^n e^{i\xi jh}$  con el resultado siguiente:

$$(6.4) \quad g^2 = \left( 2 - 4\lambda^2 \sin^2 \left( \frac{\xi h}{2} \right) \right) g - 1,$$

cuyas raíces tiene el módulo menor que uno si  $\lambda \leq 1$  que por tanto será la condición de estabilidad. La misma condición se obtiene cuando se comparan los dominios de dependencia de la ecuación diferencial y el esquema numérico en lo sería la condición CFL del método.

El programa **finedif.m** de la referencia [6] implemente el este método leap-frog y en figura 3 se ha representado la solución obtenida para el problema:

$$(6.5) \quad \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5, \\ u(x, 0) = \sin \pi x + \sin 2\pi x, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq 0,5, \end{cases}$$

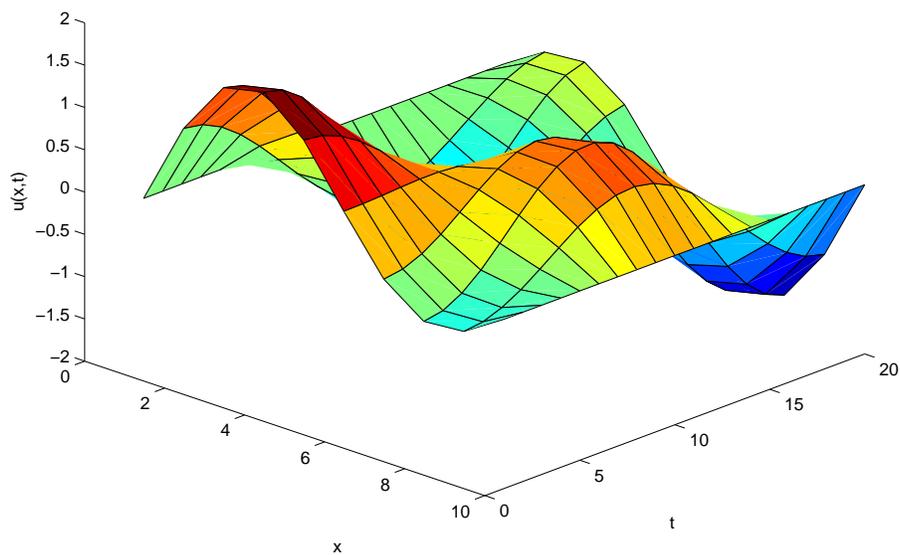


FIGURA 3.

En la bibliografía clásica [3], [4], [5], [2]... se pueden encontrar otros muchos métodos en diferencias para la ecuación de ondas de segundo orden.

## REFERENCIAS

1. R. Knobel, *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, Americal Mathematical Sociaty, 1999.
2. R.L. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser, 1992.
3. R.D. Richtmeyer and K.W.Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems (Second Edition)*, John Wiley, 1967.
4. J.C. Strikwerda, *Finite Difference Squemes for P.D.E.*, Wadswork, 1989.
5. E.H. Twizell, *Computational Methods for P.D.E.*, Ellis Horwood, 1984.
6. J.F. Mathews y K.D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB. Tercera edición*, Prentice Hall, 1999.

DEP. MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA E I.O. DE LA UPV/EHU.

E-mail address: fernando.vadillo@ehu.es