

UNA INTRODUCCIÓN A LA CUADRATURA NUMÉRICA

F. VADILLO

RESUMEN. Por razones históricas el cálculo aproximado de integrales se conoce con el nombre de *cuadratura* mientras que el término *integración* se reserva para la resolución de ecuaciones diferenciales. En esta breve introducción primero se presentan los métodos clásicos: fórmulas del punto medio, trapecios y regla de Simpson y se estudian los errores cometidos. Después se presentan las reglas de cuadratura compuestas, las fórmulas gaussianas y se finaliza estudiando los algoritmos de la cuadratura adaptativa.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Métodos habituales para obtener fórmulas de cuadratura	2
2.1. El método de interpolación	2
2.2. El método directo	3
2.3. El método de desarrollo de Taylor	3
3. Error de cuadratura	4
3.1. El teorema del núcleo de Peano	5
4. Reglas de cuadratura compuestas	6
5. Cuadratura adaptativa	7
6. Cuadratura Gaussiana	9
6.1. Fórmulas de Radau y Lobatto	11
Referencias	11

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiarán métodos para el cálculo aproximado de integrales definidas

$$(1.1) \quad \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

donde f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Esta necesidad surge por varias razones:

- Sólo una pequeña parte de las funciones elementales tienen primitivas también elementales. Considere por ejemplo la función $\exp(-x^2)$.

- Aunque exista la función primitiva, llegar a ella puede resultar tedioso, piense por ejemplo en las funciones racionales, o también pueden depender de cambios de variables más o menos ingeniosos.
- En muchas aplicaciones sólo se tiene una tabla de valores de f o una subrutina que permite evaluar f en puntos de su dominio.

La mayoría de las aproximaciones numéricas llamadas **fórmulas de cuadratura** son de la forma

$$(1.2) \quad \mathcal{I}_{n+1}(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j),$$

donde los α_j son los **coeficientes ó pesos** y los puntos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ son los **nodos** y el **error de cuadratura** es

$$(1.3) \quad \mathcal{E}_{n+1}(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{n+1}(f).$$

Para conocer la calidad de una fórmula de cuadratura se define su **grado de precisión ó exactitud**. Se dice que una fórmula de cuadratura tiene grado de exactitud $M \geq 0$ si calcula exactamente la integral para cada polinomio de grado menor o igual que M , pero no es exacta para al menos un polinomio de grado $M + 1$.

2. MÉTODO HABITUALES PARA OBTENER FÓRMULAS DE CUADRATURA

Suponiendo que los nodos x_0, \dots, x_n están dados, por ejemplo si la función sólo se conoce en una table. Para elegir los pesos se puede hacer de dos maneras

2.1. El método de interpolación. Se construye el polinomio de interpolación pasando por lo nodos

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(x),$$

y después

$$(2.1) \quad \mathcal{I}_{n+1}(f) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_a^b L_j(x) dx,$$

con los pesos $\alpha_j = \int_a^b L_j(x) dx$ para $j = 0, \dots, n$. Estas fórmulas de cuadratura se las denomina **formulas interpolatorias**.

Teorema 2.1. *Dados los nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, la fórmula interpolatoria tiene un grado de exactitud mayor o igual que n .*

Demostración. Si f es un polinomio de grado menor o igual que n , su polinomio interpolador es también f y por tanto $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}_{n+1}(f)$. \square

Ejemplo 2.2. Fórmula del rectángulo

$$\mathcal{I}_R(f) = (b - a) f(a).$$

Ejemplo 2.3. Fórmula del punto medio

$$\mathcal{I}_{PM}(f) = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Ejemplo 2.4. Fórmula de los trapecios

$$\mathcal{I}_T(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

2.2. El método directo. Otra opción es determinar los pesos directamente escribiendo el sistema de ecuaciones para los polinomios $1, x, x^2, \dots, x^n$ que resulta

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= b - a, \\ \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n &= \frac{b^2 - a^2}{2}, \\ &\vdots \\ \alpha_0 x_0^n + \alpha_1 x_1^n + \dots + \alpha_n x_n^n &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

un sistema con una única solución porque su matriz es de Vandermonde con abscisas dos a dos distintas. De este modo se ha probado el siguiente teorema

Teorema 2.5. *Dados $n+1$ nodos distintos dos a dos, existen unos únicos pesos α_j para que la regla (1.2) tenga un grado de exactitud mayor o igual a n*

además,

Teorema 2.6. *Dados $n+1$ nodos distintos dos a dos, la regla (1.2) tiene un grado de exactitud mayor o igual a n ssi es interpolatoria.*

Es interesante destacar que en otras situaciones este método puede dar fórmulas que no son interpolatorias, por ejemplo usando datos de la derivada de la función en los nodos.

Ejemplo 2.7. Trate de encontrar una aproximación a $\int_{-1}^1 f(x) dx$ con los datos $f(-1), f(0), f(1), f'(-1), f'(0)$ y $f'(1)$.

2.3. El método de desarrollo de Taylor. En este tercer método se supone que la función f es suficientemente diferenciable para desarrollar por Taylor hasta donde sea necesario. Ilustraremos este método para obtener la **regla de Simpson**:

$$\mathcal{I}_S(f) = A f(a) + B f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C f(b).$$

Llamando $c = \frac{a+b}{2}$ y $h = \frac{b-a}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f) &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(c) + \dots \right] dx \\ &= 2h f(c) + \frac{h^3}{3} f''(c) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(c) + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_S(f) &= A f(a) + B f(c) + C f(b) \\ &= (A+B+C) f(c) + h(-A+C) f'(c) + \frac{h^2}{2} (A+C) f''(c) + \\ &\quad \frac{h^3}{6} (-A+C) f'''(c) + \frac{h^4}{24} (A+C) f^{(4)}(c) + \dots, \end{aligned}$$

e identificando coeficientes se tiene

$$\begin{aligned} 2h &= A + B + C, \\ 0 &= -A + C, \\ \frac{2}{3}h &= A + C, \\ 0 &= -A + C, \\ \frac{2}{5}h &= A + C, \\ &\vdots \end{aligned}$$

con la solución $A = C = \frac{h}{3}$ y $B = \frac{4h}{3}$. Por tanto la **regla de Simpson** es:

$$\mathcal{I}_S(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

3. ERROR DE CUADRATURA

Suponiendo que se ha utilizado una fórmula interpolatoria para aproximar la integral (1.1), el error cometido

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(P_n) = \int_a^b (f(x) - P_n(x)) dx,$$

luego

$$|\mathcal{E}_{n+1}(f)| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)|,$$

de modo que si P_n es una buena aproximación a f , entonces $\mathcal{I}_{n+1}(f)$ es una buena aproximación a $\mathcal{I}(f)$.

Por otra parte, usando el error de interpolación $f(x) - P_n(x)$ en la forma de Newton se tiene

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \Pi(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \Pi(x) dx,$$

donde $\Pi(x) = (x-x_0) \cdots (x-x_n)$. Entonces si $\Pi(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$ y $f^{(n+1)}$ es continua, se puede aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral para obtener

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} \int_a^b \Pi(x) dx,$$

con $\min\{x_j, a\} < \alpha < \max\{x_j, b\}$.

Ejemplo 3.1. Para la **fórmula del rectángulo**

$$(3.1) \quad \mathcal{E}_R(f) = \frac{f'(\alpha)}{(1)!} \int_a^b (x-a) dx = f'(\alpha) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Ejemplo 3.2. Para la **regla de los trapecio**

$$(3.2) \quad \mathcal{E}_T(f) = -f''(\alpha) \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Cuando la función $\Pi(x)$ cambia de signo en $[a, b]$, este argumento no sirve y se debe acudir a otros métodos si se desea expresar el error en términos de derivadas.

3.1. El teorema del núcleo de Peano. Peano descubrió un teorema que permite expresar el error para una clase muy amplia de problemas numéricos. Se considera el espacio $\mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ donde se define una forma lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \int_a^b [a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \cdots + a_n(x)f^{(n)}(x)] dx \\ &+ \sum_{j=1}^n b_{j,0}f(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{j,1}f'(x_j) + \cdots + \sum_{j=1}^n b_{j,n}f^{(n)}(x_j), \end{aligned}$$

donde las funciones $a_j(x)$ son continuas a trozos y los nodos $x_j \in [a, b]$.

Teorema 3.3. Si $\mathcal{L}(p) = 0$ para todo polinomio en Π_n , entonces para cada $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$

$$\mathcal{L}(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt,$$

donde $K(x)$ es el núcleo de Peano definido de la forma

$$K(t) = \frac{1}{n!} \mathcal{L}_x[(x-t)_+^n],$$

y el subíndice denota que es aplicado como función de x de la forma

$$\begin{aligned} (x-t)_+^n &= (x-t)^n, & x \geq t, \\ (x-t)_+^n &= 0, & x < t. \end{aligned}$$

Demostración. Ver [2, pag. 123]. □

Corolario 3.4. Si además de las hipótesis del teorema anterior, el núcleo $K(t)$ no cambia de signo en $[a, b]$ entonces para cada $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ existe un $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\mathcal{L}(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \mathcal{L}(x^{n+1}).$$

Demostración. Por el teorema del valor medio

$$\mathcal{L}(f) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b K(t) dt,$$

que aplicado a x^{n+1} da

$$\mathcal{L}(x^{n+1}) = (n+1)! \int_a^b K(t) dt,$$

de donde se concluye de manera inmediata. □

Ejemplo 3.5. Se considera la **regla del punto medio** por lo que

$$\mathcal{E}_{PM}(f) = \int_a^b f(x) dx - (b-a) f(c), \quad \text{con } c = \frac{a+b}{2}.$$

Su núcleo de Peanos es

$$K(t) = \int_a^b (x-t)_+ dx - (b-a) (c-t)_+,$$

De modo que

$$\begin{aligned} \text{Si } t \geq c &\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} (b-t)^2, \\ \text{Si } t \leq c &\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} (t-a)^2, \end{aligned}$$

que al no cambiar el signo se puede aplicar el corolario y calculando

$$\mathcal{L}(x^2) = \int_a^b x^2 dx - (b-a) \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{12}(b-a)^3,$$

con lo que se llega a la expresión del error

$$(3.3) \quad \mathcal{E}_{PM}(f) = \frac{f''(\xi)}{24} (b-a)^3.$$

Ejemplo 3.6. Por un procedimiento parecido el error para la **regla de Simpson** es

$$(3.4) \quad \mathcal{E}_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

4. REGLAS DE CUADRATURA COMPUESTAS

Para construir fórmulas de cuadratura compuesta se elige una partición del intervalo de integración $[a, b]$ de la forma

$$a = z_0 < z_1 < \dots < z_n = b,$$

de forma que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} f(x) dx.$$

y después se aplica una cuadratura para cada integral del segundo miembro. Generalmente los sub intervalos son iguales de forma que $z_j = z_0 + j h$.

Aplicada por ejemplo la **regla de los trapecios** en cada sub intervalo resulta

$$\frac{h}{2} [f(z_0) + 2 f(z_1) + \dots + 2 f(z_{n-1}) + f(z_n)].$$

Para conocer su error se usaría la expresión (??) con el resultado

$$\mathcal{E}_T(f) = \sum_{j=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\xi_j), \quad \text{con } z_j \leq \xi_j \leq z_{j+1}.$$

Lo que demostraría que si f'' está acotada,

$$|\mathcal{E}_T(f)| \leq \frac{h^3}{12} n \|f''\|_\infty = \frac{h^2}{12} (b-a) \|f''\|_\infty = \mathbf{O}(h^2).$$

De igual manera como

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}} f(x) dx.$$

aplicando la regla de Simpson en cada subintervalo se tiene la **regla de Simpson compuesta**

$$\frac{h}{3} [f(z_0) + 4 f(z_1) + 2 f(z_2) + 4 f(z_3) + \dots + 4 f(z_{n-1}) + f(z_n)],$$

con la acotación de error

$$|\mathcal{E}_S(f)| \leq \frac{b-a}{90} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty = \mathbf{O}(h^4).$$

5. CUADRATURA ADAPTATIVA

Considere por ejemplo, que necesite integrar la función $f(x) = \cos(x^3)^{200}$ en el intervalo $0 \leq x \leq 3$ representada en la Figura 1 con un error del orden de 10^{-6} . Si utilizara la regla de Simpson y estimara el paso h en su expresión de error (3.4), necesitaría del orden de 19200 sub-intervalos que evidentemente es una exageración para calcular el área dibujada encerrada por la gráfica de la función. Lo razonable para este problema sería utilizar sub-intervalos pequeños en la zona de los picos y sub-intervalos muchos mayores para las mesetas. Esta idea es la que desarrolla la técnicas de cuadratura adaptativas que se comentan.

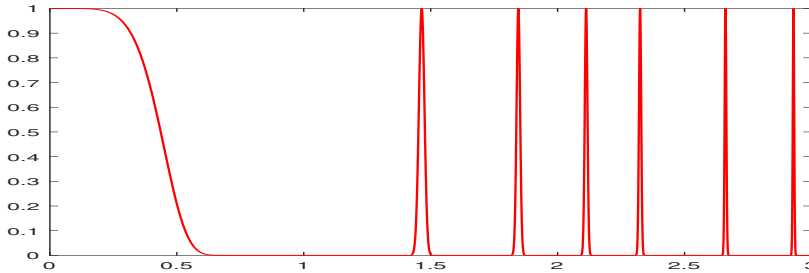


FIGURA 1. Función $\cos(x^3)^{200}$.

Suponga que quiere aproximar una integral definida $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x) dx$ utilizando una fórmula de cuadratura $\mathcal{Q}(f)$ tal que

$$(5.1) \quad |\mathcal{Q}(f) - \mathcal{I}(f)| < Tol,$$

donde Tol representan una tolerancia dada.

Lo primero será realizar alguna estimación del error

$$\mathcal{E}(f; h) = K h^q + O(h^{q+1}),$$

suponiendo que q es el orden de la fórmula de cuadratura. Una técnica clásica es evaluar la integral con dos pasos diferentes, por ejemplo h y $h/2$ y actuar de la siguiente manera: si se utiliza una fórmula de los trapecios compuesta se tiene

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)], \\ R_2 &= \frac{h}{4} [f(a) + 2f(a+h/2) + 2f(a+h) + \cdots + 2f(b-h/2) + f(b)], \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f) - R_1 &\approx K h^2, \\ \mathcal{I}(f) - R_2 &\approx K \left(\frac{h}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

es decir

$$\mathcal{I}(f) - R_2 \approx \frac{1}{4} (\mathcal{I}(f) - R_1).$$

por lo que

$$\mathcal{I}(f) - R_1 = (\mathcal{I}(f) - R_2) + (R_2 - R_1) \approx \frac{1}{4} (\mathcal{I}(f) - R_1) + (R_2 - R_1),$$

es decir

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f) - R_1 &\approx \frac{4}{3} (R_2 - R_1), \\ \mathcal{I}(f) - R_2 &\approx \frac{1}{3} (R_2 - R_1),\end{aligned}$$

que son las **estimaciones a posteriori del error**.

Para la regla de Simpson un análisis semejante daría:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f) - S_1 &\approx \frac{16}{15} (S_2 - S_1), \\ \mathcal{I}(f) - S_2 &\approx \frac{1}{15} (S_2 - S_1)\end{aligned}$$

ver [4], [1] o también [6].

Una vez que se tienen los estimadores a posteriori de los errores se actúa de la siguiente manera: se comienza con una partición cualquiera del intervalo

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_r = b,$$

con $h_j = x_j - x_{j-1} > 0$ se computa $Q_j \approx I_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx$ tal que

$$|I_j - Q_j| < \frac{h_j}{b-a} Tol, \quad j = 1, \dots, r,$$

esto se consigue partiendo el paso hasta cuando hiciera falta, y finalmente la aproximación $Q_f = \sum_{j=1}^r Q_j$ evidentemente verificará la condición (5.1).

El comando **quad** implementa en MATLAB la regla de Simpson con paso adaptado, por ejemplo para función dibujada en la figura 1 el comando `quad(@f, 0, 3, 0.000001)` devuelve la estimación 0,5316. Por otra parte **quadgui** de [5] muestra la evolución del algoritmo y los sub-intervalos finales.

Otro ejemplo sería dibujar las espirales de Fresnel (figura 2) definidas por sus ecuaciones paramétricas:

$$(5.2) \quad x(t) = \int_0^t \cos(s^2) ds, \quad y(t) = \int_0^t \sin(s^2) ds.$$

Con el programa


```

%Fresnel.m
%
n=1000;
x=zeros(1,n); y=x;
t=linspace(-4*pi,4*pi,n+1);
for j=1:n-1
    x(j)= quad(@x cos(x.^2),t(j),t(j+1),1e-3);
    y(j)= quad(@x sin(x.^2),t(j),t(j+1),1e-3);
end
x=cumsum(x); y=cumsum(y);
plot(x,y)
grid on

```

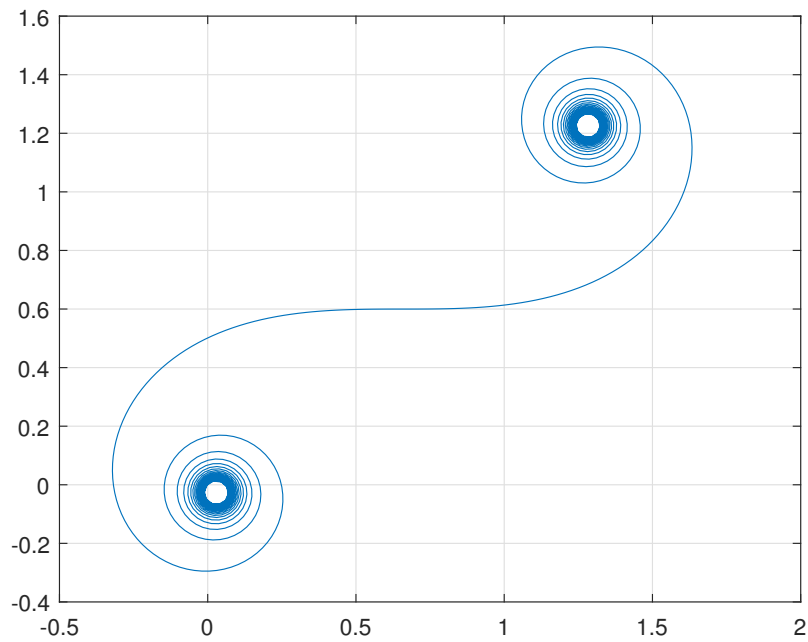


FIGURA 2. Espirales de Fresnel

6. CUADRATURA GAUSSIANA

Hasta ahora en las fórmulas de cuadratura (1.2) se suponía que los nodos x_j estaban fijados y lo que se podía decidir son los $n + 1$ pesos α_j por lo que conseguían fórmulas de exactitud n . Si también se pudieran elegir los $n + 1$ nodos x_0, \dots, x_n , como se dispone de $2n + 2$ parámetros, se buscarían fórmulas exactas para los polinomios $1, x, \dots, x^{2n+1}$ que son las denominadas fórmulas de cuadratura Gaussianas estudiadas en [7].

Evidentemente, los fórmulas Gaussianas son interpolatorias por lo que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j) + \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \Pi_{n+1}(x) dx,$$

con $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$. Por tanto, los nodos deben verificar que

$$(6.1) \quad \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \Pi_{n+1}(x) dx = 0,$$

para $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$.

Por otra parte, si $p(x) \in \mathcal{P}_m$, es decir, es un polinomio de grado m , entonces

$$\begin{aligned} x &\mapsto p[x_0, x] = \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} \in \mathcal{P}_{m-1}, \\ x &\mapsto p[x_0, x_1, x] \in \mathcal{P}_{m-2}, \\ x &\mapsto p[x_0, x_1, x_2, x] \in \mathcal{P}_{m-3}, \\ &\vdots \\ x &\mapsto p[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \in \mathcal{P}_{m-(n+1)}, \end{aligned}$$

Sustituyen entonces x^{n+1}, \dots, x^{2n+1} en (6.1) se concluye que $\Pi_{n+1}(x)$ es un polinomio ortogonal a todos los polinomios de grados menor o igual que n , es decir

$$\Pi_{n+1}(x) \perp \mathcal{P}_n.$$

Además, (6.1) no puede ser cierta para polinomios de grado $\leq 2n+2$ pues entonces $\Pi(x)$ sería ortogonal a todo polinomio de grado $\leq n+1$ lo que es absurdo. En conclusión:

Teorema 6.1. *Una fórmula de cuadratura (1.2) usando $n+1$ nodos puede tener grado de precisión $2n+1$. Además, el grado máximo se alcanza únicamente cuando usa fórmulas interpolatorias y los nodos x_0, x_1, \dots, x_n son los ceros del polinomio $\Pi_{n+1} = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ el $n+1$ -ésimo polinomio ortogonal en (a, b) .*

Además, si x_0, x_1, \dots, x_n son los ceros de $\Pi_{n+1}(x)$, entonces sus polinomios de Lagrange son

$$L_j(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_j) \Pi'_{n+1}(x_j)},$$

y los pesos

$$(6.2) \quad \alpha_j = \frac{1}{\Pi'_{n+1}(x_j)} \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_j)} dx,$$

para $j = 0, \dots, n$.

Teorema 6.2. *Los pesos α_j de la expresión (6.2) son positivos.*

Demostración. Ver notas. □

En cuanto al error de cuadratura se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 6.3. *Si la función f tiene $2n + 2$ derivadas continuas en $[a, b]$, el error de cuadratura de la fórmula Gaussiana es*

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi_{n+1}^2(x) dx.$$

Demostración. Ver notas. □

6.1. Fórmulas de Randau y Lobatto. También se pueden considerar fórmulas de cuadratura con $(n + 1) + (m + 1)$ del tipo

$$(6.3) \quad \mathcal{I}_{(n+1)+(m+1)}(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j) + \sum_{j=0}^m \beta_j f(y_j),$$

con los nodos y_j fijos y los otros x_j a elegir. En este caso, el orden que cabe esperar es $2n + m + 1$.

Los casos más conocidos son

- Fórmulas de Gauss: $m = 0$.
- Fórmula de Randau: $m = 1, y_1 = a$.
- Fórmula de Lobatto: $m = 2, y_1 = a, y_2 = b$.

Ver [3] para un detallado análisis.

REFERENCIAS

1. U.M. Ascher and C. Greif, *A First Course in Numerical Methods*, SIAM, 2011.
2. R. Bulirsch and J. Stoer, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 1980.
3. P.J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration. Second Edition*, Academic Press, 1984.
4. M.H. Holmes, *Introduction to Scientific Computing and Data Analysis*, Springer, 2016.
5. C.B. Moler, *Numerical Computing with MATLAB*, SIAM, 2004.
6. R. Sacco, F. Saleri, and A. Quarteroni, *Numerical Mathematics*, Springer, 2000.
7. J.M: Sanz Serna, *La cuadratura gaussiana según Gauss*, <https://arxiv.org/pdf/1807.03506.pdf> (2018).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UPV/EHU
Email address: fernando.vadillo@ehu.eus