PROBLEMAS

1. En un país imaginario, el alfabeto consta de exactamente 6 letras y, para enviar un mensaje en clave, utilizan el siguiente código de ceros y unos:

$$a \mapsto 0;\ b \mapsto 1;\ c \mapsto 00;\ d \mapsto 01;\ e \mapsto 10;\ f \mapsto 11.$$

Por ejemplo, 1 0 01 se lee *bad*. Cierto día, al intentar transmitir una palabra en clave, un agente secreto envía la siguiente sucesión

$$101100011101.$$

Como se ve, ha olvidado hacer los espacios correspondientes entre las distintas letras, por lo que el mensaje se puede leer de muchas maneras. ¿De cuántas? (Fase local, 1998.)

2. Demostrar que para todo entero positivo n, el número

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

es múltiplo de 8. (Fase nacional, 1972)

3. Demostrar que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural. (Fase local, 1992)

4. Probar que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser ni un cuadrado ni un cubo perfectos. (Fase nacional, 2006)

5. Demostrar que para todo número primo p distinto de 2 y de 5, existen infinitos múltiplos de p de la forma $1111\ldots1$ (escrito sólo con unos) (Fase nacional, 1993)

6. Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todos nueves. Por ejemplo, si $p = 13$, $999999 = 13 \cdot 76923$. (Fase nacional, 2003)

7. ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2? Justificar la respuesta. (Fase nacional, 2004)

8. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero positivo k tal que ninguno de los números enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras. (Fase nacional, 2006)

9. Encontrar todas las soluciones (x, y) reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - yx + y^2 &= 7 \\ x^2y + xy^2 &= -2. \end{aligned}$$

(Fase local, 2005)

10. Demuestra que no existe ninguna función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que cumpla $f(f(n)) = n + 1$ para todo número natural n. (Fase nacional, 2000)

11. Encontrad todas las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que $f(f(n)) = n+2$ para todo número natural n. (Fase local, 2004)

12. Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en el conjunto de los números reales pasan por un punto fijo que se determinará. (Fase nacional, 1997)

13. Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo BCA. (Fase nacional, 2003)

14. Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

(Fase nacional, 1998)

15. Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras. (Fase nacional, 2003)