NOTAS

Toda expresión algebraica del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

es un polinomio de grado n, si $a_n \neq 0$.

RELACIONES DE DIVISIBILIDAD

1) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.
2) Si n es par, $x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1})$.
3) Si n es impar, $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1})$.

FÓRMULA DE LEIBNITZ

Es bien conocida la fórmula de Newton para la potencia de un binomio. No tanto lo es la siguiente fórmula de Leibnitz para la potencia de un polinomio:

$$(a + b + \ldots + k)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\kappa!}\ a^\alpha b^\beta \ldots k^\kappa,$$

donde la suma se realiza para todos los valores $\alpha, \beta, \ldots, \kappa$ tales que $\alpha + \beta + \ldots + \kappa = n$. Observar que, en el caso de un binomio, se obtiene la fórmula de Newton.

RELACIONES DE CARDANO-VIETA

Si r_1 y r_2 son las raíces del polinomio $x^2 + px + q$, al igualar las expresiones

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 + px + q,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} -p &= r_1 + r_2 \\ q &= r_1 r_2. \end{aligned}$$

En el caso general, si $r_1, \ldots, r_n$ son las raíces del polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, entonces

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= r_1 + r_2 + \ldots + r_n, \\ a_{n-2} &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n, \\ &\vdots \\ (-1)^n a_0 &= r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n. \end{aligned}$$

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Dados dos polinomios P y Q, con Q distinto de cero, existen únicos S y R tales que: $P = Q \cdot S + R$, con $R = 0$ ó $\operatorname{grad} R < \operatorname{grad} Q$.
Se dice que Q divide a P (o que P es divisible por Q) si el resto de la división de P por Q es el polinomio nulo.

TEOREMA DEL RESTO

Si $Q(x) = x - a$, entonces el resto de la división de P por Q es igual a $P(a)$.
Corolario: a es raíz del polinomio P si y sólo si P es divisible por $x - a$.

PROBLEMAS

1. *La suma de dos de las raíces de la ecuación*

$$x^3 - 503x^2 + (a+4)x - a = 0$$

es igual a 4. *Determinar el valor de* a.

2. *Hallar la condición para que los polinomios* $P(x) = x^2 + ax + b$ *y* $Q(x) = x^2 + px + q$ *tengan una raíz común.*

3. *Sea* $f(x) = a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2$, *donde* a, b, c *son números racionales positivos. Probar que, si existe un número natural* n *tal que* $f(n) = 0$, *entonces* n *es un cuadrado perfecto.*

4. *Sean* a, b *dos números enteros. Resolver la ecuación*

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

5. *Determinar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación de segundo grado* $ax^2 + bx + c = 0$ *tenga una raíz igual al cuadrado de la otra.*

6. *Probar que la ecuación* $(x - a)^2 + (x - b)^2 = 2ab - 1$, *con* $a, b \in \mathbb{N}$, *no tiene raíces racionales. Probar también que, si* $b = a + 1$, *la ecuación tiene dos raíces reales y calcular la parte entera de las mismas.*

7. (Bulgaria, 1995) *Dada la parábola* $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$, *llamamos* S *al área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de* $f(x)$ *con el eje de abscisas y el vértice de la parábola. Determinar todos los números racionales* p *tales que* S *es un número entero.*

8. (Fase nacional, 1996) *Sean* a, b, c *números reales. Se consideran las funciones*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabiendo que $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$, *demostrar que*

$$|f(x)| \leq 5/4, \; |g(x)| \leq 2, \; \forall x \in [-1, 1].$$

9. (Fase Local, 1973) *Dados tres números* x, y, z, *se conocen su suma* s_1, *la suma de los cuadrados,* s_2 *y la suma de sus cubos,* s_3. *Hallar el producto* $x \cdot y \cdot z$.

10. (Fase Local, 1990) *Sin resolver la ecuación cúbica* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, *expresar la suma de los cubos de sus raíces en función de los coeficientes* a, b *y* c.

11. (Fase local, 1996) *La suma de dos de las raíces de la ecuación* $x^3 - 503x^2 + (a + 4)x - a = 0$ *es igual a* 4. *Determinar el valor de* a.

12. (Fase local, 1990) *La ecuación* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ $(c \neq 0)$, *tiene tres raíces distintas en progresión geométrica y los inversos de las mismas pueden ordenarse para formar una progresión aritmética. Hallar* b *y* c *en función de* a.

13. (Fase local, 2004) *Consideremos los polinomios* $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ *(donde* x *es la variable,* A, B, C *son parámetros). Supongamos que, si* a, b, c *son las tres raíces de* P, *las de* Q *son* $(a + b)/2$ *y* $(b + c)/2$. *Probar que* $a = b = c$.

14. (Fase local, 2003) *Dado el polinomio* $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, *prueba que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces* $B^3D = C^3$.

15. (Fase local, 1979) *Se considera el polinomio* $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. *Probar que, para todo número natural* n *mayor que* 2, *se verifica:*

    (a) $P(n) = 6m$, *para algún número natural* m.

    (b) $m + 1$ *no es primo.*

16. (Fase local, 2000) *Se sabe que el polinomio* $p(x) = x^3 - x + k$ *tiene tres raíces que son números enteros. Determinar el valor de* k.

17. (Fase local, 2001) *Sean a, b y c números reales. Probar que, si $p(x) = x^3+ax^2+bx+c$ tiene tres raíces reales, entonces $3b \leq a^2$.*

18. (Fase local, 2002) *Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, hallar dichas raíces.*

19. (Olimpiada iberoamericana, 1990) *Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Probar que si el gráfico de f es tangente al eje X, entonces $f(x)$ tiene sus 3 raíces racionales.*

20. *Demostrar que, en el caso de que las ecuaciones*

$$x^3 + mx - n = 0,\ nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0\ (n \neq 0)$$

tengan una raíz común, la primera tendrá dos raíces iguales. Determinar, en este caso, las raíces de las dos ecuaciones, en función de n.

21. (Fase nacional, 2003) *Sea r una raíz real de $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Demostrar que, tanto r como r^2, son irracionales.*

22. (Fase nacional, 2000) *Sean los polinomios:*

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1, \\ Q(x) &= x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1. \end{aligned}$$

Hallar las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a, b y c ($a \neq c$) para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes y resolver en ese caso las ecuaciones $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$.

23. *Determinar el valor de λ para que el polinomio $p(x) = x^4 - x^3 + \lambda x^2 + 6x - 4$ tenga dos raíces x_1, x_2 cuyo producto sea 2. Para dicho valor de λ determinar las raíces x_1, x_2 y resolver la ecuación $p(x) = 0$.*

24. (Olimpiada iberoamericana, 1985) *Encontrar las raíces $r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$ de la ecuación*

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0,$$

sabiendo que son números reales positivos que verifican la relación $\dfrac{r_1}{2} + \dfrac{r_2}{4} + \dfrac{r_3}{5} + \dfrac{r_4}{8} = 1.$

25. *Resolver, en función del parámetro k, la ecuación*

$$x^4 - 2kx^2 + x + k^2 - k = 0.$$

¿Para qué valores de k todas las raíces son reales?

26. (Chequia, 2000) *Determinar las funciones cuadráticas $f(x)$ para las que existe otra función cuadrática $g(x)$ tal que las raíces de la ecuación $g(f(x)) = 0$ son cuatro términos consecutivos y distintos de una progresión aritmética y, a su vez, son también raíces de la ecuación $f(x) \cdot g(x) = 0$.*

27. (Fase local, 1999) *Para cada $m \in \mathbb{R}$ se considera la ecuación*

$$3x^5 - 25x^3 + 60x + m = 0.$$

Discutir, según el valor de m, cuántas soluciones reales tiene dicha ecuación.

28. *Demostrar que, para cualquier $n = 0, 1, \ldots,$*

$$\frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = (1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^n}).$$

29. *Encontrar el menor entero positivo n_0 tal que*

$$(1 + x)^n > 1 + nx + nx^2 + \ldots + nx^{2001}, \ \forall x > 0.$$

Demostrar que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$.

30. (Fase local, 2004) *Sean a, b, c tres números reales distintos y $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si se sabe que*

1) $P(x)$ da resto a cuando se divide por $x - a$;

2) $P(x)$ da resto b cuando se divide por $x - b$;

3) $P(x)$ da resto c cuando se divide por $x - c$;

encontrar el resto de la división de $P(x)$ por $(x - a)(x - b)(x - c)$.

31. (Fase nacional, 2006) *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que, si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.*

32. *Un polinomio $P(x)$ de grado n satisface la siguiente condición:*

$$P(k) = 1/k \text{ para } k = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n.$$

Encontrar $P(0)$.

33. (Fase local, 1998) *Un polinomio $p(x)$ tiene coeficientes enteros y, para cierto entero a, se verifica $p(a) = p(a+1) = p(a+2) = 1$. ¿Existe algún entero k tal que $p(k) = 8$?*