NOTAS

Una ecuación funcional es aquella cuya incógnita es una función, que debe determinarse en todo su dominio.
Algunos ejemplos básicos son los siguientes:
1) Determinar todas las funciones tales que $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Si el dominio está formado sólo por números racionales, las únicas soluciones son del tipo $f(x)=k\cdot x$, donde k es una constante arbitraria.
2) Determinar todas las funciones continuas en $\mathbb{R}$ tales que $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. En este caso, las posibles soluciones (aparte de la trivial $f\equiv 0$) son las funciones del tipo $f(x)=e^{kx}$.
Ejemplos similares pueden plantearse con las condiciones $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ o bien $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, cuyas soluciones son también funciones conocidas.

De nuevo, las técnicas utilizadas para resolver este tipo de problemas son distintas según se trate de funciones definidas sobre los naturales, enteros, racionales o reales.

PROBLEMAS

1. (Fase local, 1998) *Sea* $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. *Se consideran las funciones* f *de* A *en* A. *¿Cuántas de ellas verifican que* $f(f(x))=x$, *para todo* x *de* A? *¿Cuántas verifican que* $f(f(f(x)))=x$ *para todo* x *de* A?

2. *Determinar todas las funciones* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ *que verifican las condiciones* $f(2)=2$, $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$ *y* $f(m)>f(n)$, *si* $m>n$.

3. (Fase nacional, 1998) *Hallar todas las funciones* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *estrictamente crecientes y tales que* $f(n+f(n))=2f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

4. (Fase local, 2004) *Hallar todas las funciones* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *tales que* $f(f(n))=n+2,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5. (Fase nacional, 2000) *Demostrar que no existe ninguna función* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *que cumpla* $f(f(n))=n+1$.

6. (Fase local, 2005) *Hallar todas las funciones* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tales que*

$$x^2\cdot f(x)+f(1-x)=2x-x^4,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

7. *Hallar todas las funciones* $f(x)$ *tales que* $3f(2-x)+2f(x)=x^2$.

8. *Resolver la ecuación funcional*

$$x^2-2f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right),\ x\neq 0.$$

9. *Resolver la ecuación funcional*

$$x-\frac{1}{2}f(x)=f\left(\frac{x}{3x-1}\right),\ x\neq 1/3.$$

10. *Hallar las funciones* $f(x)$, *definidas para todo* $x\neq \pm 1/3$, *tales que*

$$f\left(\frac{x-1}{1+3x}\right)=\frac{x+1}{1-3x}-f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right).$$

11. *Hallar las funciones* $f:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$ *tales que* $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x$.

12. *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$ *una función que verifica* $f(x+2)=f(x-1)\cdot f(x+5)$. *Probar que* f *es periódica.*

13. (Fase nacional, 2002) *Hallar todos los polinomios* $P(t)$ *de una variable, que cumplen:*

$$P(x^2-y^2)=P(x+y)\cdot P(x-y),$$

para todos los números reales x *e* y.

14. (Fase iberoamericana, 1987) *Encontrar una función* $f(x)$ *tal que* $[f(x)]^2\cdot f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=64x$ *para* $x\neq 0,\pm 1$.

15. (Fase local, 1996) *Para cada número real* x, *se define* $[x]$ *como el mayor entero que es menor o igual que* x. *Si definimos*

$$q(n)=\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right],\ n=1,2,3,\ldots,$$

determinar todos los enteros positivos n *tales que* $q(n)>q(n+1)$.

16. (Fase local, 2000) *Se considera la función* $f(x)=ax+b$, *donde* a,b *son números reales y* x *es una variable real. ¿Para qué valores de* a *y* b *se verifica que la composición* $f(f(f(\ldots(x)\ldots)))$ *(2000 veces) sea igual a* x*?*

17. (Fase nacional, 2004) *Si representamos por* $\mathbb{Z}$ *el conjunto de los números enteros, hallar todas las funciones* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tales que* $f(x + f(y)) = f(x) - y,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

18. (Fase local, 2001) *Consideramos el conjunto* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *de los números naturales y la aplicación* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que cumple las dos siguientes condiciones:*

    a) $f(f(n)) = n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

    b) $f(f(n) + 1) = \begin{cases} n - 1 & \textit{si } n \textit{ es par} \\ n + 3 & \textit{si } n \textit{ es impar.} \end{cases}$

    Determinar el valor de $f(n)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *observando previamente que* f *es biyectiva y que, al no ser nunca* $f(f(n) + 1) = 2$, *tiene que ser* $f(1) = 2$.

19. (Fase nacional, 2001) *Determinar la función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que cumple, para cualesquiera* $s, n \in \mathbb{N}$, *las siguientes condiciones:*

    $f(1) = f(2^s) = 1$ *y* $f(2^s + n) = f(n) + 1$ *si* $n < 2^s$.

    Calcular el valor máximo de $f(n)$ *cuando* $n \leq 2001$.

    Hallar el menor número natural n *tal que* $f(n) = 2001$.

20. (Fase nacional, 2002) *Se define sobre los naturales una función* g *que verifica:*

    $g(2) = 1$;

    $g(2n) = g(n)$;

    $g(2n + 1) = g(2n) + 1$.

    Sea n *un número natural tal que* $1 \leq n \leq 2002$. *Calcular el valor máximo* M *de* $g(n)$ *y calcular cuántos valores de* n *verifican* $g(n) = M$.

21. (Fase iberoamericana, 1989) *Se considera una función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que verifica* $f(1) = 1$, $f(2n + 1) = f(2n) + 1$ *y* $f(2n) = 3f(n)$. *Encontrar todos los valores de* m *tales que* $m = f(n)$ *para algún* n.

22. (Fase iberoamericana, 1990) *Se define la función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *por* $f(2^n - 1) = 0$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$, *y* $f(m) = f(m+1)+1$, *si* $m \neq 2^n - 1$. *Probar que* $f(n)+n = 2^k - 1$ *para algún* k, *y encontrar* $f(2^{1990})$.

23. (Fase iberoamericana, 1990) *Sea* f *una función definida sobre los naturales que cumple las condiciones*

    i) $f(f(n)) = 4n + 9$.

    ii) $f(2^k) = 2^{k+1} + 3$.

    Calcular $f(1789)$.