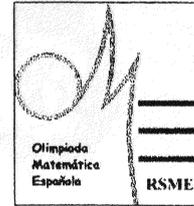




XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA



Fase local 2006

Primera sesión (Tanda 1)
Viernes 20 de enero

Problema 1

Se da un triángulo rectángulo isósceles ABC , con el ángulo recto en C , y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo l con centro A divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo m con centro en B es tangente al arco l en un punto de la hipotenusa AB .

Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

Problema 2

Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuación	Raíces
$x^2 + a_1x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2x + b_2 = 0$	x_0, x_2
\vdots	\vdots
$x^2 + a_nx + b_n = 0$	x_0, x_n

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0.$$

Problema 3

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD . Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC . Calcular los ángulos del triángulo ABC .

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas.



XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA



Fase local 2005 (Tanda 1) Segunda sesión Viernes 20 de enero

Problema 4

Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos a y b , tales que

b^2 sea múltiplo de a ,
 a^3 sea múltiplo de b^2 ,
 b^4 sea múltiplo de a^3 ,
 a^5 sea múltiplo de b^4 ,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5 .

Problema 5

Un número positivo x verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es entero y calcular su valor.

Problema 6

Se considera la inecuación

$$|x-1| < ax,$$

donde a es un parámetro real.

- Discutir la inecuación según los valores de a .
- Caracterizar los valores de a para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas.