NOTAS

Toda expresión algebraica del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

es un polinomio de grado n, si $a_n \neq 0$.

RELACIONES DE DIVISIBILIDAD

1) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.
2) Si n es par, $x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1})$.
3) Si n es impar, $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1})$.

FÓRMULA DE LEIBNITZ

Es bien conocida la fórmula de Newton para la potencia de un binomio. No tanto lo es la siguiente fórmula de Leibnitz para la potencia de un polinomio:

$$(a + b + \ldots + k)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\kappa!}\ a^\alpha b^\beta \ldots k^\kappa,$$

donde la suma se realiza para todos los valores $\alpha, \beta, \ldots, \kappa$ tales que $\alpha + \beta + \ldots + \kappa = n$.

Observar que, en el caso de un binomio, se obtiene la fórmula de Newton.

RELACIONES DE CARDANO-VIETA

Si r_1 y r_2 son las raíces del polinomio $x^2 + px + q$, al igualar las expresiones

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 + px + q,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} -p &= r_1 + r_2 \\ q &= r_1 r_2. \end{aligned}$$

En el caso general, si $r_1, \ldots, r_n$ son las raíces del polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, entonces

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= r_1 + r_2 + \ldots + r_n, \\ a_{n-2} &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n, \\ &\vdots \\ (-1)^n a_0 &= r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n. \end{aligned}$$

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Dados dos polinomios P y Q, con Q distinto de cero, existen únicos S y R tales que: $P = Q \cdot S + R$, con $R = 0$ ó $\operatorname{grad} R < \operatorname{grad} Q$.

Se dice que Q divide a P (o que P es divisible por Q) si el resto de la división de P por Q es el polinomio nulo.

TEOREMA DEL RESTO

Si $Q(x) = x - a$, entonces el resto de la división de P por Q es igual a $P(a)$.

Corolario: a es raíz del polinomio P si y sólo si P es divisible por $x - a$.

PROBLEMAS

1. *La suma de dos de las raíces de la ecuación*

$$x^3 - 503x^2 + (a+4)x - a = 0$$

es igual a 4*. Determinar el valor de* a*.*

2. *Hallar la condición para que los polinomios* $P(x) = x^2 + ax + b$ *y* $Q(x) = x^2 + px + q$ *tengan una raíz común.*

3. *Sea* $f(x) = a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2$*, donde* a, b, c *son números racionales positivos. Probar que, si existe un número natural* n *tal que* $f(n) = 0$*, entonces* n *es un cuadrado perfecto.*

4. *Sean* a, b *dos números enteros. Resolver la ecuación*

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

5. *Determinar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación de segundo grado* $ax^2 + bx + c = 0$ *tenga una raíz igual al cuadrado de la otra.*

6. *Probar que la ecuación* $(x - a)^2 + (x - b)^2 = 2ab - 1$*, con* $a, b \in \mathbb{N}$*, no tiene raíces racionales. Probar también que, si* $b = a + 1$*, la ecuación tiene dos raíces reales y calcular la parte entera de las mismas.*

7. (Bulgaria, 1995) *Dada la parábola* $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$*, llamamos* S *al área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de* $f(x)$ *con el eje de abscisas y el vértice de la parábola. Determinar todos los números racionales* p *tales que* S *es un número entero.*

8. (Fase Local, 1973) *Dados tres números x, y, z, se conocen su suma s_1, la suma de los cuadrados, s_2 y la suma de sus cubos, s_3. Hallar el producto $x \cdot y \cdot z$.*

9. *La ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ($c \neq 0$), tiene tres raíces distintas en progresión geométrica y los inversos de las mismas pueden ordenarse para formar una progresión aritmética. Hallar b y c en función de a.*

10. (Primera Fase, 2004) *Consideremos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (donde x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $(a+b)/2$ y $(b+c)/2$. Probar que $a = b = c$.*

11. (Primera Fase, 2003) *Dado el polinomio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, prueba que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$.*

12. (Primera Fase, 1979) *Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Probar que, para todo número natural n mayor que 2, se verifica:*
(a) $P(n) = 6m$, para algún número natural m.
(b) $m + 1$ no es primo.

13. (Primera Fase, 2000) *Se sabe que el polinomio $p(x) = x^3 - x + k$ tiene tres raíces que son números enteros. Determinar el valor de k.*

14. (Ibero, 1990) *Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Probar que si el gráfico de f es tangente al eje X, entonces $f(x)$ tiene sus 3 raíces racionales.*

15. *Demostrar que, en el caso de que las ecuaciones*

$$x^3 + mx - n = 0,\ nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0\ (n \neq 0)$$

tengan una raíz común, la primera tendrá dos raíces iguales. Determinar, en este caso, las raíces de las dos ecuaciones, en función de n.

16. *Sea r una raíz real de $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Demostrar que, tanto r como r^2, son irracionales.*

17. (España, 1996) *Sean a, b, c números reales. Se consideran las funciones*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabiendo que $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$, demostrar que

$$|f(x)| \leq 5/4,\ |g(x)| \leq 2,\ \forall x \in [-1, 1].$$

18. (Ibero, 1987) *Probar que las raíces r, s, t de la ecuación $x(x-2)(3x-7) = 2$ son reales y positivas. Encontrar* $\operatorname{arctg} r + \operatorname{arctg} s + \operatorname{arctg} t$.

19. (España, 2000) *Sean los polinomios:*

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1,$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Hallar las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a, b *y* c $(a \neq c)$ *para que* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *tengan dos raíces comunes y resolver en ese caso las ecuaciones* $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$.

20. *Determinar el valor de* λ *para que el polinomio* $p(x) = x^4 - x^3 + \lambda x^2 + 6x - 4$ *tenga dos raíces* x_1, x_2 *cuyo producto sea* 2. *Para dicho valor de* λ *determinar las raíces* x_1, x_2 *y resolver la ecuación* $p(x) = 0$.

21. (Ibero, 1985) *Encontrar las raíces* $r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$ *de la ecuación*

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0,$$

sabiendo que son números reales positivos que verifican la relación $\dfrac{r_1}{2} + \dfrac{r_2}{4} + \dfrac{r_3}{5} + \dfrac{r_4}{8} = 1$.

22. *Resolver, en función del parámetro* k, *la ecuación*

$$x^4 - 2kx^2 + x + k^2 - k = 0.$$

¿Para qué valores de k *todas las raíces son reales?*

23. (Chequia, 2000) *Determinar las funciones cuadráticas* $f(x)$ *para las que existe otra función cuadrática* $g(x)$ *tal que las raíces de la ecuación* $g(f(x)) = 0$ *son cuatro términos consecutivos y distintos de una progresión aritmética y, a su vez, son también raíces de la ecuación* $f(x) \cdot g(x) = 0$.

24. *Para cada* $m \in \mathbb{R}$ *se considera la ecuación*

$$3x^5 - 25x^3 + 60x + m = 0.$$

Discutir, según el valor de m, *cuántas soluciones reales tiene dicha ecuación.*

25. *Demostrar que, para cualquier* $n = 0, 1, \ldots,$

$$\frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = (1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^n}).$$

26. *Encontrar el menor entero positivo* n_0 *tal que*

$$(1 + x)^n > 1 + nx + nx^2 + \ldots + nx^{2001},\ \forall x > 0.$$

Demostrar que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$.

27. *Un polinomio $P(x)$ de grado n satisface la siguiente condición:*

$$P(k) = 1/k \text{ para } k = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n.$$

Encontrar $P(0)$.

28. (Primera Fase, 1998) *Un polinomio $p(x)$ tiene coeficientes enteros y, para cierto entero a, se verifica $p(a) = p(a+1) = p(a+2) = 1$. ¿Existe algún entero k tal que $p(k) = 8$?*

29. *Se sabe que el número de soluciones reales del sistema*

$$\begin{aligned} 2x^3 + (y^2 + 6)(x - 1) &= y(x^2 + 1) \\ 2y^3 + (x^2 + 6)(y - 1) &= x(y^2 + 1) \end{aligned}$$

es finito. Probar que el sistema tiene un número impar de soluciones reales.

30. (España, 1989) *Demostrar que la suma*

$$S = \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}},$$

con $a \geq -3/4$, es independiente del valor de a y hallar el valor de dicha suma.