NOTAS

Una ecuación algebraica es aquella que involucra operaciones algebraicas con una o varias variables y cuyo objetivo es obtener los posibles valores que toman dichas variables. Las técnicas de resolución difieren según las variables sean enteras, racionales o reales. Por ejemplo, la regla de Cramer permite resolver sistemas lineales.

Los ejercicios que siguen son una muestra de los diferentes tipos de ecuaciones que pueden resolverse sin excesivos conocimientos técnicos. Por ejemplo, si las soluciones de una ecuación o sistema son números enteros, lo más probable es que se necesite utilizar algún resultado de divisibilidad o aplicar algún tipo de factorización. En el caso de soluciones reales, las técnicas pueden ser más variadas.

PROBLEMAS

1. *Si* $(x^2+y^2)^3=(x^3+y^3)^2$*, calcular* $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

2. *Sean* x, y *números reales que satisfacen la ecuación* $x^2-4x+y^2+3=0$*. Si llamamos* M *y* m *a los valores máximo y mínimo de* x^2+y^2*, respectivamente, calcular* $M-m$.

3. *a) Encontrar todos los pares de enteros positivos* (x,z) *que verifiquen la ecuación*

$$x^2=z^2+120.$$

   b) Encontrar todos los pares de enteros (x,z) *que verifiquen la ecuación*

$$x^3=z^3+721.$$

4. *Encontrar todas las soluciones del sistema*

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4-2xy \\ x^2+z^2 &= 9-2xz \\ y^2+z^2 &= 16-2yz, \end{aligned}$$

   sabiendo que $x+y+z>2$.

5. *Se considera la ecuación* $x^2+y^2=z^2+18$*, donde* x, y, z *son enteros positivos.*

   a) *Probar que* z *debe ser par.*

b) *Probar que existen infinitas soluciones tales que* $z = y + 1$.

c) *Probar que no existe ninguna solución tal que* $z = y + 5$.

d) *Encontrar todas las soluciones en las que* x, y, z *formen una progresión aritmética.*

e) *Encontrar todas las soluciones en las que* x, y, z *formen una progresión geométrica.*

f) *Probar que hay un número infinito de soluciones tales que* $x = y$.

6. (Fase Iberoamericana, 1985) *Encontrar todas las soluciones enteras del sistema*

$$a + b + c = 24,\ \ a^2 + b^2 + c^2 = 210, abc = 440.$$

7. (Fase Iberoamericana, 1988) *Supongamos que* $k^3 = 2$ *y llamamos* x, y, z *a tres números racionales tales que* $x+yk+zk^2 \neq 0$. *Probar que existen* u, v, w *racionales, tales que*

$$(x + yk + zk^2)(u + vk + wk^2) = 1.$$

8. (Fase Iberoamericana, 1985) *Sean* $x,\ y,\ z$ *números reales tales que* $x, y \neq 1$, $x \neq y$, $\dfrac{yz - x^2}{1 - x} = \dfrac{xz - y^2}{1 - y}$. *Probar que*

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = x + y + z.$$

9. (Fase Iberoamericana, 1989) *Encontrar todas las soluciones reales del sistema:*

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1, \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 1, \\ -x^3 + y^3 + z^3 &= -1. \end{aligned}$$

10. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2, \end{aligned}$$

siendo a *y* b *constantes. Dar condiciones sobre* a *y* b *para que las soluciones del sistema sean números positivos diferentes.*

11. (Fase Nacional, 1996) *Discutir la existencia de soluciones reales* x *de la ecuación*

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

según los valores reales del parámetro p*, y resolverla en aquellos casos en que tenga solución.*

12. *Demostrar que, si*

$$\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = 1,$$

entonces $x + y = 0$.

13. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x \cdot |x| + y \cdot |y| &= 1 \\ [x] + [y] &= 1 \end{aligned}$$

(donde $|\cdot|$ *representa el valor absoluto y* $[\cdot]$ *representa la parte entera).*