TALLER DE MATEMÁTICAS
DESIGUALDADES

Es bien sabido que en el conjunto de los números reales existe una relación de orden "natural": se dice que $x < y$ cuando $y - x$ es un número positivo. Con esta relación, el conjunto está "totalmente ordenado", es decir si $x \neq y$, entonces, o bien $x < y$, o bien $y < x$.

En esta lección comentaremos algunas desigualdades "famosas": aquellas que se establecen entre los distintos promedios de un conjunto de números reales. Con ellas intentaremos resolver los problemas que se proponen después.

Dado un conjunto arbitrario de n números positivos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se pueden definir varios "promedios". Los más comunes son los siguientes:

- Media aritmética: $MA = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.
- Media geométrica: $MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.
- Media armónica: $MH = \dfrac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n}$.
- Media cuadrática: $MC = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$.

En este momento, es natural preguntarse:

1. ¿Qué es un promedio?
2. ¿Por qué existen varios promedios?

A grandes rasgos, un promedio es una cantidad que representa la escala de valores de un grupo de números. Las características básicas de un promedio son la homogeneidad (no puede variar bajo un cambio en la escala de medida) y que su valor debe estar comprendido entre el máximo y el mínimo de las cantidades que representa.

Por otra parte, no todos los promedios representan con la misma fiabilidad el mismo conjunto de números. Dependiendo del caso, es más conveniente uno que otro.

Entre los distintos promedios se pueden establecer las siguientes relaciones generales:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq MH \leq MG \leq MA \leq MC \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Vamos a demostrar la desigualdad $MG \leq MA$, para lo cual distinguiremos dos casos:

1) El caso $n = 2^k$, para todos los valores de k, lo demostraremos por inducción.

En primer lugar, si $k = 1$, tenemos que demostrar que $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Para ello partimos de la desigualdad evidente $0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$ y desarrollamos. Así pues,

$$0 \leq x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \Longrightarrow \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Supondremos a continuación que la desigualdad es cierta para cualquier valor de k, es decir

$$\sqrt[2^k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^k}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k}}{2^k}$$

y veamos que también lo es para $k+1$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k}}{2^{k+1}} + \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^k+2^k}}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^k+2^k}}{2^k}\right].\end{aligned}$$

Aplicamos la hipótesis de inducción a los dos sumandos. Así obtenemos:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}\left[(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^k})^{1/2^k} + (x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^k+2^k})^{1/2^k}\right].$$

Esta última expresión corresponde a la media aritmética de dos términos. Como en este caso se sabe que es mayor o igual que la media geométrica de dichos términos, resulta en definitiva que

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &\geq \sqrt{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^k})^{(1/2^k)} \cdot (x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^k+2^k})^{(1/2^k)}} \\ &= (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^{k+1}})^{1/2^{k+1}}.\end{aligned}$$

2) Para demostrar el caso general, procedemos del siguiente modo:

Sea $N = 2^k + m$, con $0 < m < 2^k$. A partir de la desigualdad (ya probada)

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2^{k+1}})^{1/2^{k+1}},$$

sustituimos x_i por $(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N$, para $i = N+1, \ldots, 2^{k+1}$. Obtenemos entonces:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_N+(2^{k+1}-N)\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_N)/N}{2^{k+1}}$$

$$\geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N)^{1/2^{k+1}} \cdot \frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N}^{\frac{2^{k+1}-N}{2^{k+1}}}.$$

Agrupando términos y simplificando, llegamos a la desigualdad buscada

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N)^{1/N}.$$

Otras desigualdades muy útiles en variedad de problemas son las siguientes:

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Dados dos conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, se verifica que

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Para demostrar esta desigualdad, consideramos la desigualdad (evidente)

$$(x_1 - \lambda y_1)^2 + (x_2 - \lambda y_2)^2 + \ldots + (x_n - \lambda y_n)^2 \geq 0,$$

donde λ es un parámetro real. Desarrollando la expresión anterior y agrupando términos, obtenemos:

$$(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)\lambda^2 - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geq 0.$$

Para que el polinomio cuadrático sea siempre mayor o igual que cero, necesariamente el discriminante debe ser menor o igual que cero. Esto nos conduce directamente a la desigualdad deseada.

Por cierto, a partir de esta desigualdad, es muy fácil probar que la media aritmética es siempre menor o igual a la media cuadrática. ¿Se te ocurre cómo probarlo?

Desigualdad de Bernouilli.

Sea a un número real arbitrario. Entonces,

(a) Si $0 < a < 1$, entonces $(1+x)^a \leq 1 + ax$, para todo x mayor o igual que uno.

(b) Si $a < 0$ ó $a > 1$, entonces $(1+x)^a \geq 1 + ax$, para todo x mayor que uno.

Algunos de los problemas siguientes requieren conocer algunas de las desigualdades anteriores pero otros se resuelven sin necesidad de ellas. Bastarán conocimientos más generales o deducciones más simples.

PROBLEMAS

1. *Sean $a_1, \dots, a_n$ números positivos.*

   (a) Probar que, si $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 1/n$.

   (b) Probar que, si $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, entonces $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$.

2. *Dado el conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ de números positivos, probar que*
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

3. *Sean a, b, c tres números positivos tales que $abc = 1$. Probar que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8$.*

4. *Sea n un número natural mayor que 1. Probar que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.*

5. *Sean x, y, z tres números reales tales que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Probar que*
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3/4.$$

6. *Sean x, y, z tres números reales tales que $x + y + z = 6$. Probar que $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.*

   Los problemas que vienen a continuación, también relativos a desigualdades numéricas, necesitan otras técnicas diferentes y no precisan conocer las fórmulas anteriores.

7. (Fase Local, 1997) *Si a, b, c son números reales positivos, demostrar la desigualdad*
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 3(a-b)(b-c).$$
   ¿Cuándo se verifica la igualdad?

8. (Fase Iberoamericana, 1988) *Sean a, b, c, d, p, q enteros positivos tales que $ad - bc = 1$ y $a/b > p/q > c/d$. Probar que $q \geq b + d$ y que, si $q = b + d$, entonces $p = a + c$.*

9. (Fase Nacional, 1989) *Probar las desigualdades*
$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100} < \frac{1}{10}.$$

10. *Dado un número natural arbitrario n, demostrar que*
$$1,1 \cdot 1,01 \cdot 1,001 \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{10^n}\right) < \frac{9}{8}.$$

11. (Fase Local, 2005) *Sean x, y, z números reales positivos.*

    (a) Si $x + y + z \geq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$?.

    (b) Si $x + y + z \leq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$?.