NOTAS

En los problemas en los que intervienen circunferencias conviene tener presentes las siguientes propiedades:

(i) La mediatriz de una cuerda de una circunferencia pasa por su centro. Como un caso límite de esta propiedad se tiene que la recta tangente y el radio trazados por un punto de la circunferencia son perpendiculares.

Se deduce de lo anterior que tres puntos no colineales determinan una única circunferencia cuyo centro se obtiene intersecando las mediatrices de los segmentos que unen dichos puntos. En particular, las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes (se cortan justamente en el centro de la circunferencia circunscrita, punto que se llama el *circuncentro* del triángulo.)

(ii) En todo triángulo se puede inscribir una circunferencia. (Se parte de una circunferencia en el interior del triángulo que sea tangente a dos de los lados y se hace aumentar su radio progresivamente manteniendo siempre las tangencias a los dos lados. En algún momento la circunferencia toca al tercer lado y por lo tanto es tangente a los tres lados a la vez.) Hay una relación muy sencilla entre el radio de esta circunferencia y el área del triángulo: el área es el producto del radio por el perímetro del triángulo dividido por dos (la demostración es muy simple, basta dividir el triángulo en otros tres triángulos desde el centro de la circunferencia).

Por cuestiones de simetría, es fácil ver que las bisectrices de los ángulos de un triángulo pasan por el centro de la circunferencia inscrita, por lo tanto las tres bisectrices de un triángulo se cortan en dicho punto (se llama el *incentro* del triángulo).

La última propiedad es extremadamente útil cuando hay que manejar circunferencias y ángulos. Recordemos que en una circunferencia de radio unidad, la medida en radianes del ángulo que forman dos radios es por definición la longitud del arco del sector circular que determinan. Por esa razón 360° (la circunferencia completa) son 2π radianes y 90° (un cuarto de circunferencia) son $\pi/2$ radianes. En adelante mediremos siempre los ángulos de esta forma.

(iii) Si A, B y C son tres puntos en la circunferencia de radio unidad, el ángulo que forman los segmentos AB y AC es la mitad de la longitud del arco $\overset{\frown}{BC}$. En particular, si unimos un punto A de una circunferencia con los extremos de un diámetro, el triángulo resultante es rectángulo en A.

1. Los segmentos AX y BX son perpendiculares. Desde A parten dos semirrectas cuya bisectriz es AX y, similarmente, desde B parten otras dos semirrectas con bisectriz BX. Además, los ángulos que forman estas semirrectas son el mismo. Demostrar que los cuatro puntos de corte de las semirrectas están sobre una circunferencia.

2. Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados $AMCD$ y $BEHM$ en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados, probar que:

(i) Los puntos B, N y C están alineados.

(ii) El punto H es el ortocentro del triángulo ABC.

(Fase local, 2005)

3. Se consideran tres circunferencias C_1, C_2 y C_3 tangentes a una misma recta y tangentes entre sí dos a dos. Hallar el radio de C_3 sabiendo que el de C_1 es 36 cm. y el de C_2 es 9 cm. (Fase local, 1999.)

Un problema del mismo estilo pero más complicado es el siguiente.

4*. Se tienen dos semicircunferencias iguales y tangentes S_1 y S_2 de modo que sus diámetros se encuentran en una misma recta. Trazamos la recta tangente común a ambas r y dibujamos una circunferencia C_1 tangente a r, S_1 y S_2. Luego trazamos otra circunferencia C_2 tangente a C_1, S_1 y S_2. Así sucesivamente obtenemos una familia de circunferencias $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$

(i) Calcular el radio r_n de C_n en función de n y el radio R de S_1 y S_2.

(ii) Utilizar la construcción del problema para comprobar que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

tiende a 1 cuando n tiende a infinito. (Fase local, 1991.)

5. En el triángulo ABC, rectángulo en A, se traza la altura AD (D pertenece a BC). Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B, respectivamente. Sea P el punto de intersección de AD y MN. Demostrar que $AP = r$, el radio de la circunferencia inscrita en ABC. (Fase local, 1995.)

6*. El baricentro del triángulo ABC es G. Denotamos por g_a, g_b y g_c las distancias desde

G a los lados a, b y c, respectivamente. Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que:

(i) $g_a \geq 2r/3$, $g_b \geq 2r/3$, $g_c \geq 2r/3$.

(ii) $(g_a + g_b + g_c)/r \geq 3$. (Fase nacional, 1999.)

7. Dos circunferencias secantes C_1 y C_2 de radios r_1 y r_2 se cortan en los puntos A y B. Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a C_1 y C_2 en dos puntos que llamaremos P_r y Q_r, respectivamente. Demuestra la siguiente propiedad: Existe un punto M, que depende sólo de C_1 y C_2, tal que la mediatriz del segmento P_rQ_r pasa por M. (Fase nacional, 2000.)

8. Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M. (Olimpiada Iberoamericana, 2004.)

9*. Un triángulo acutángulo se inscribe en una circunferencia. Cada uno de los tres arcos en que la circunferencia queda dividida se refleja respecto del correspondiente lado del triángulo (el arco $\overset{\frown}{AB}$ respecto del lado AB, etc.). Demostrar que los tres arcos reflejados son concurrentes.

10*. Una cuerda de longitud constante se desliza sobre una semicircunferencia. El punto medio de la cuerda y las proyecciones de sus extremos sobre el diámetro de la semicircunferencia forman los vértices de un triángulo. Demostrar que el triángulo es isósceles y que nunca cambia de forma.

---

* Hay ayudas en la página web.