NOTAS

La Aritmética es la parte de las matemáticas que se ocupa de estudiar las propiedades y relaciones de los números naturales o, con un poco más de generalidad que no suele suponer mayor dificultad, de los números enteros. La Aritmética más avanzada suele llamarse Teoría de Números. En estas breves notas no podemos desarrollar de forma sistemática toda esta rama de las matemáticas. Nos limitaremos a exponer algunas nociones básicas.

Uno de los conceptos fundamentales de la aritmética es el de divisibilidad. Dados dos números enteros a y b, diremos que a *divide* a b (o que a es un *divisor* de b, o que b es un *múltiplo* de a) si existe otro número entero c tal que $b = ac$. Cuando esto sucede suele escribirse $a \mid b$. Sin querer ser exhaustivos, mencionamos a continuación algunas propiedades elementales de la divisibilidad. Si a, b, c son números enteros, se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $a \mid a$; $a \mid -a$; si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$; si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.

(ii) $a \mid 0$; si $a \mid b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$.

(iii) Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid b + c$ y $a \mid b - c$. De forma más general, $a \mid ub + vc$ para cualesquiera enteros u, v.

Si a y b son dos números enteros y $a > 0$, obviamente puede suceder que a no divida a b, sin embargo siempre se puede escribir b como suma de un múltiplo de a y un resto utilizando el algoritmo de la división.

TEOREMA (Algoritmo de la división): Sean a y b números enteros con $a > 0$. Existen dos únicos enteros c y r tales que $b = ca + r$ y $0 \leq r < a$. Estos números se llaman, respectivamamente, *cociente* y *resto* de la división.

Dados a y b en las condiciones anteriores, podemos escribir $b = c_1 a + r_0$ con $0 \leq r_0 < a$. Si $c_1 \neq 0$, dividiendo nuevamente tenemos $c_1 = c_2 a + r_1$ con $0 \leq r_1 < a$, de modo que $b = c_2 a^2 + r_1 a + r_0$. Repitiendo este procedimiento sucesivas veces podemos escribir $b = r_s a^s + r_{s-1} a^{s-1} + \cdots + r_1 a + r_0$ donde todos los r_i son números entre 0 y $a - 1$. Se dice que hemos desarrollado b en base a y suele escribirse abreviadamente $b = r_s r_{s-1} \ldots r_1 r_0$ (ó $b = (r_s r_{s-1} \ldots r_1 r_0)_a$ para que no haya ambiguedad en cuanto a la base utilizada). Habitualmente empleamos el sistema de numeración en base 10 ($a = 10$).

Un número p mayor que 1 se dice que es un número *primo* si los únicos divisores positivos que tiene son 1 y p. El siguiente resultado es uno de los principales de la aritmética.

TEOREMA (Fundamental de la Aritmética): Sea b un número natural. Entonces existen números primos distintos $p_1, \ldots, p_t$ y números naturales $e_1, \ldots, e_t$ tales que $b = p_1^{e_1} \ldots p_t^{e_t}$. Además los números p_i y e_i son únicos.

En muchos problemas es de gran utilidad pensar en término de los restos que quedan al dividir por un número fijo $a > 0$. Los números enteros se pueden clasificar en a bloques: los que dan resto 0 al dividir por a (es decir los múltiplos de a), los que dan resto 1, etc. hasta llegar a los que dan resto $a - 1$. Dos números que dan el mismo resto están en el mismo bloque y se dice que son *congruentes módulo a*. Si esto sucede para dos números b y c, suele escribirse $b \equiv c \pmod{a}$. Observar que $b \equiv c \pmod{a}$ si y sólo si $a \mid b - c$.

Lo interesante de pensar en término de restos es que se puede operar entre ellos simplificando los cálculos y los resultados son consistentes. Por ejemplo, supongamos que queremos hallar el resto de dividir $127^2 + 38^4$ entre 17. En lugar de calcular $127^2 + 38^4$ y luego dividir entre 17 podemos pensar así: el resto de dividir 127 entre 17 es 8 y el de 38 es 4, así que lo que nos pieden es el resto de dividir $8^2 + 4^4$ entre 17. El resto de $8^2 = 64$ es 13 y el de $4^4 = 256$, 1 (mejor aún, el "resto" de $4^2 = 16$ es -1, así que el resto de $4^4 = (4^2)^2$ es $(-1)^2 = 1$!). Así pues, el resto pedido es $13 + 1 = 14$.

Damos un último ejemplo de lo útil de pensar en término de restos. Supongamos que a y b son números coprimos (es decir, su máximo común divisor es 1). Los posibles restos de dividir por b son $0, 1, \ldots, b-1$. Al multiplicarlos por a obtenemos los b números $0 \cdot a = 0, 1 \cdot a = a, \ldots, (b-1)a$. Ahora observamos que los restos de dividir estos b números entre b son todos distintos. En efecto, supongamos por ejemplo, que al dividir ia y ja entre b (estamos suponiendo $0 \leq i \leq j < b$) da el mismo resto. Entonces ia y ja serían congruentes módulo b, es decir, b dividiría a la diferencia $ja - ia = (j-i)a$. Como a y b son coprimos de aquí se deduce que b divide a $j - i$. Pero $0 \leq j - i < b$, luego necesariamente $j - i = 0$, esto es $i = j$. Tenemos pues que los restos de dividir entre b los números $0 \cdot a = 0, 1 \cdot a = a, \ldots, (b-1)a$ son todos distintos, por lo tanto deben aparecer todos ellos (no necesariamente en su orden natural). En particular el resto de dividir uno de los números ia entre b es 1, lo cual significa que existe un entero c tal que $ia = cb + 1$ y, despejando, $1 = ia + (-c)b$. En resumen, hemos probado el siguiente resultado:

TEOREMA (Identidad de Bozout): Sean a y b dos números coprimos. Entonces existen enteros u, v tales que $1 = ua + vb$.

PROBLEMAS

1. Demostrar que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural. (Fase local, 1992)

2. Para $n = 2, 3, 4, \ldots, 32$, se define A_n como el producto de todos los múltiplos positivos de n menores o iguales que 1000. (Por ejemplo, $A_3 = 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 999$). ¿Cuál es el mayor entero positivo que divide a todos los números $A_2, A_3, \ldots, A_{32}$? (Fase local, 1990)

3. Demostrar que, cualquiera que sea el número natural n, las fracciones

$$\frac{n-1}{n}, \qquad \frac{n}{2n+1}, \qquad \frac{2n+1}{2n^2+2n}$$

son irreducibles. (Fase local, 1993)

4. Determinar todos los números naturales n tales que el número

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

tiene exactamente tres divisores primos. (Fase local, 1993)

5. Determinar el menor número natural m tal que, para todo número natural $n \geq m$, se verifique $n = 5a + 11b$, siendo a y b enteros mayores o iguales que 0. (Fase local, 1994)

6. (i) Si n es un número natural, denotemos $\overline{n}$ el número que se obtiene escribiendo las cifras de n en sentido inverso. Demostrar que la diferencia entre n y $\overline{n}$ es un múltiplo de 9.

(ii) Llamemos ahora $\overline{n}$ al número que se obtiene a partir de n intercambiando la primera y la última cifra, la segunda y la anteúltima, etc. Demostrar que si el número de cifras de n es par, la suma de n y $\overline{n}$ es múltiplo de 11 y que si el número de cifras es impar, lo es la diferencia.

7. Encontrar, razonadamente, todos los números naturales n tales que n^2 tenga solamente cifras impares. (Fase local, 1996)

8. Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determínese las dos últimas cifras de a_{2000}. (Fase local, 2000)

9. Hallar el número natural n que es producto de los primos p, q y r, sabiendo que $r - q = 2p$ y $rq + p^2 = 676$. (Fase local, 2001)

10. Escribo en una pizarra 14 números enteros, no necesariamente distintos, que verifican la propiedad de que al borrar cualquiera de ellos, puedo agrupar los trece restantes en tres montones de igual suma.

(i) Demuestra que cada uno de los catorce números es múltiplo de 3.

(ii) ¿Es posible que alguno de los catorce números que he escrito no sea el 0?

(Fase local, 2002)

11. Hallar las cuatro últimas cifras de 3^{2004}. (Fase local, 2004)

12. Encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$. (Fase local, 2005)

13. Sea p un número primo. Determinar todos los enteros k tales que $k^2 - pk$ es un cuadrado perfecto. (Fase nacional, 1997)

14. Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3×3. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba abajo. ¿Hay alguna distribución para la que el valor de esa suma sea 2001? (Fase nacional, 2001)

15. Sea n un número natural y m el que resulta de escribir en orden inverso las cifras de n. Determinar, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n. (Fase nacional, 2002)

16. Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todos nueves. Por ejemplo, si $p = 13$, $999999 = 13 \cdot 76923$. (Fase nacional, 2003)

17. ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2? Justificar la respuesta. (Fase nacional, 2004)

18. Probar que para todo entero positivo n, la expresión decimal de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

es periódica mixta. (Fase nacional, 2005)