*NOTAS*

Existen numerosos resultados sobre la geometría de los triángulos (que de hecho incluye toda la trigonometría). Aquí nos limitaremos a recordar los más básicos.

Cuando se trata con triángulos es habitual el convenio de denotar con letras mayúsculas los vértices y los ángulos (la misma letra para el vértice y el correspondiente ángulo). Para indicar un lado (o lo que mide) se usa la misma letra que la del ángulo opuesto pero escrita en minúscula.

El primer resultado fundamental sobre triángulos es el siguiente:

(i) Los tres ángulos de un triángulo siempre suman $180°$.

Dos conceptos importantes son los de *triángulos semejantes* y *triángulos congruentes*. Se habla de triángulos semejantes cuando tienen los mismos ángulos y de triángulos congruentes cuando, además de tener los mismos ángulos, también tienen los mismos lados. En otras palabras, triángulos congruentes tienen la misma forma y tamaño (coinciden cuando se superponen), sin embargo triángulos semejantes sólo tienen la misma forma.

(ii) Dos triángulos semejantes tienen los lados proporcionales, más precisamente si en dos triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ se dan las igualdades entre ángulos $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$, entonces se dan las siguientes relaciones de proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

(Recordar el convenio para la notación de ángulos y lados). De este resultado se sigue fácilmente el Teorema de Thales: si dos semirectas que parten de un punto común $O$ se cortan con un cierto número de rectas paralelas, los segmentos en que quedan divididas son proporcionales.

Sabemos que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura, por tanto dos triángulos en los que las bases y alturas midan lo mismo tienen la misma área. Este sencillo principio proporciona el siguiente resultado que a veces es muy útil (si no, véase la demostración del Teorema de Pitágoras que se da en la página web).

(iii) Si en un triángulo $ABC$ desplazamos el vértice $C$ paralelamente al lado $AB$, el área de los triángulos que resultan permanece constante.

Los ángulos y lados de un triángulo están relacionados. La situación más simple se da cuando el triángulo es rectángulo.

(iv) Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos coincide con el cuadrado de la hipotenusa, es decir, si el triángulo $ABC$ es rectángulo en $A$ ($A = 90°$), entonces $a^2 = b^2 + c^2$.

Para triángulos no rectángulos las relaciones son más complicadas:

(v) Teorema del coseno: En un triángulo $ABC$ se tiene la igualdad

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

(Observar que cuando $A = 90°$ se obtiene justamente el Teorema de Pitágoras.)

Teorema del seno: En cualquier triángulo $ABC$ se cumple que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

*PROBLEMAS*

**1.** A 14 m. de la orilla de un río hay un muro con un agujero a mitad de altura. En un cierto momento del día la sombra del muro alcanza exactamente a la otra orilla del río y, en ese momento, la luz que pasa por el agujero se proyecta en el suelo a 10 m. de la base del muro. ¿A qué distancia se proyectará dicha luz cuando la sombra del muro retroceda hasta el centro del río?

**2.** Se consideran los cuadriláteros con diagonales perpendiculares de una cierta medida. Demostrar sin escribir ninguna fórmula que todos ellos tienen la misma área.

**3*.** Sea $ABC$ un triángulo y $C'$ el pie de la altura por el vértice $C$ (esto es, $C'$ es la intersección de la altura por $C$ con el lado $AB$). Sea $P$ el punto de corte de la paralela a $AC$ por $C'$ con la mediatriz del segmento $CC'$. Demostrar que el segmento $PC$ mide la mitad que el lado $AC$.

El siguiente problema es una propiedad de gran utilidad cuando se trata con bisectrices en triángulos.

**4*.** En el triángulo $ABC$, $P$ es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $A$ con el lado opuesto $BC$. Demostrar que

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

**5*.** Sea $ABC$ un triángulo rectángulo en $C$, $P$ el punto de corte de la bisectriz en $A$ y el lado $BC$ y $Q$ el punto de corte de la bisectriz en $B$ y el lado $AC$. Sean $M$ y $N$ los pies de las perpendiculares a $AB$ por $P$ y por $Q$, respectivamente. Hallar el ángulo $NCM$.

Los problemas que siguen se han propuesto en olimpiadas recientes.

**6*.** En el triángulo $ABC$, de área 100, $M$ es el punto medio del lado $AC$ y $P$ es un punto del lado $AB$ tal que el triángulo $AMP$ tiene área 36. La paralela a $PM$ trazada por $B$ corta al lado $AC$ en $Q$. Hallar el área del triángulo $MPQ$. (Fase local, 1998.)

**7.** Sea $P$ un punto del lado $BC$ de un triángulo $ABC$. La paralela por $P$ a $AB$ corta al lado $AC$ en el punto $Q$ y la paralela por $P$ a $AC$ corta al lado $AB$ en el punto $R$. La razón entre las áreas de los triángulos $RBP$ y $QPC$ es $k^2$. Determínese la razón entre las áreas de los triángulos $ARQ$ y $ABC$. (Fase local, 2000.)

**8*.** ¿Existe algún triángulo en el que las medidas de sus tres lados sean números naturales consecutivos y el ángulo mayor sea el doble que el menor? Si existe, determinad sus medidas. (Fase local, 2004.)

**9*.** En el triángulo acutángulo $ABC$, $AH$, $AD$, y $AM$ son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde $A$, estando $H$, $D$ y $M$ en el lado $BC$. Si las longitudes de $AB$, $AC$ y $MD$ son, respectivamente, 11, 8 y 1, calcula la longitud del segmento $DH$. (Fase local, 2002.)

**10.** En el triángulo $ABC$, la bisectriz trazada desde $A$ divide al lado opuesto en dos segmentos, de los que conocemos uno: $BT = 572$ m. Si dicha bisectriz corta a la mediana $BM$ en los segmentos $BD = 200$ m. y $DM = 350$ m., calcula el lado $a$ de dicho triángulo y plantea una ecuación con incógnita $c$ para obtener el lado $c$ (no hace falta que lo calcules explícitamente). (Fase local, 2002.)

* Hay ayudas en la página web.