NOTAS

Son frecuentes los problemas en los que se pide demostrar que una determinada fórmula o hecho es cierto para cada número natural. Los enunciados suelen ser del tipo: "Para cada número natural n se define x_n (o lo que sea) como bla, bla, bla. Demostrar que x_n cumple bla, bla, bla". Un método de demostración útil en muchos de estos casos es el llamado *método de inducción*. Consiste en probar que la primera de las afirmaciones es cierta (o sea, cuando $n = 1$; ésta es la *base* de la inducción) y que siempre que la afirmación es válida para un cierto $n \geq 1$, también es cierta para $n + 1$ (éste es el *principio inductivo*). En estas condiciones queda demostrado que *todas* las afirmaciones son ciertas: como es cierta la afirmación para $n = 1$, por el principio inductivo, también vale para $n = 2$. Entonces, otra vez por el principio inductivo, vale para $n = 3$ y así sucesivamente.

Otra herramienta general relacionada con la inducción es la recurrencia: se tiene un problema planteado para un cierto valor y se consigue reducirlo al mismo problema pero correspondiente a un valor (o a varios) menor.

PROBLEMAS

Los dos primeros problemas son típicos de inducción.

1. Para cada número natural n escribimos

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

definiéndose así las sucesiones de enteros $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

(i) Demostrar que a_n y b_n son impares para todo n.

(ii) Demostrar que b_n es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos

$$\frac{a_n + (-1)^n}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{a_n - (-1)^n}{2}.$$

(Fase local, 1991.)

2. Sean a y b números reales tales que $0 < b < a$. Se define por recurrencia la sucesión $\{x_n\}$ como sigue:

$$x_1 = b; \qquad x_{n+1} = 2x_n - \frac{x_n^2}{a} \quad (n \geq 1).$$

Demostrar que $\{x_n\}$ es monótona y acotada y calcular su límite. (Fase local, 1992.)

Los enunciados de algunos problemas que siguen quizá no inviten a pensar en la inducción y recurrencia, sin embargo, ésta es la clave.

3*. En un país imaginario, el alfabeto consta de exactamente 6 letras y, para enviar un mensaje en clave, utilizan el siguiente código de ceros y unos:

$$a \mapsto 0;\ b \mapsto 1;\ c \mapsto 00;\ d \mapsto 01;\ e \mapsto 10;\ f \mapsto 11.$$

Por ejemplo, 1 0 01 se lee *bad*. Cierto día, al intentar transmitir una palabra en clave, un agente secreto envía la siguiente sucesión

$$101100011101.$$

Como se ve, ha olvidado hacer los espacios correspondientes entre las distintas letras, por lo que el mensaje se puede leer de muchas maneras. ¿De cuántas? (Fase local, 1998.)

4*. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar al aire una moneda diez veces salgan en algún momento dos caras seguidas?

5. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez de forma que su disposición sea simétrica respecto de la diagonal principal y que ninguna amenace a otra?

6*. Un subconjunto $A \subseteq M = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$ se dice *majo* si tiene la siguiente propiedad:

$$\text{“Si } 2k \in A, \text{ entonces } 2k-1 \in A \text{ y } 2k+1 \in A\text{”.}$$

(El conjunto vacío y M son majos). ¿Cuántos subconjuntos majos tiene M? (Fase local, 1994.)

7. Escrito el trángulo aritmético

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots & 1991 & & 1992 & & 1993 \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \ldots & & 3983 & & 3985 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & \ldots & \ldots & \ldots & & 7968 & & \\
& & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \iddots & & &
\end{array}$$

donde cada número es igual a la suma de los dos que tiene encima, razonar que el único número que aparece en la última fila es múltiplo de 1993. (Fase nacional, 1993.)

8. Probar que si el producto de n números reales y positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n. (Fase nacional, 1975)

9. Demostrar que para todo entero positivo n, el número

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

es múltiplo de 8. (Fase nacional, 1972)

10. Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

¿Cuándo es válida la igualdad? (Fase nacional, 1980)

* Hay ayudas en la página web.