Si en una clase hay 15 chicas y 10 chicos, es evidente que el número total de alumnos en la clase es 25. Sin embargo, si hay 15 personas que han aprobado alguna asignatura y 10 que han suspendido alguna, no podemos concluir que haya 25 personas en la clase. El problema es que puede haber personas que hayan aprobado alguna asignatura *y que también* hayan suspendido alguna, imaginemos que son 8. Al sumar 15 y 10 estamos contando estas 8 personas dos veces, por lo que el número verdadero de alumnos en la clase es $15 + 10 - 8 = 17$. En Matemáticas, estas ideas se formalizan por medio de conjuntos. Dados dos conjuntos finitos A y B (por ejemplo, el conjunto de los chicos y el conjunto de las chicas, o el conjunto de quienes han aprobado alguna asignatura y el de los que han suspendido alguna), queremos contar el número de elementos que hay en total entre A y B. En otras palabras, queremos contar el número de elementos en la unión $A \cup B$. El número de elementos de un conjunto X se suele denotar mediante el símbolo $|X|$. Nuestro objetivo es por lo tanto dar una fórmula para $|A \cup B|$.

Decimos que A y B son *disjuntos* si no tienen ningún elemento común, como pasa con los conjuntos de chicos y chicas. Si A y B son disjuntos, es claro que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Por el contrario, si A y B no son disjuntos entonces hay que restar los elementos comunes de A y B, es decir, los elementos de la intersección $A \cap B$. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado, que se conoce con el nombre de *principio de inclusión-exclusión*: si A y B son dos conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Obsérvese que esta fórmula es válida en general, sean A y B disjuntos o no.

¿Qué sucede si tenemos más de dos conjuntos? Se puede probar fácilmente por inducción sobre n que, dados n conjuntos finitos $A_1, \dots, A_n$, se satisface la igualdad

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k \text{ distintos}} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\ + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|. \qquad (*) \end{aligned}$$

En el caso particular de que los conjuntos $A_1, \dots, A_n$ sean disjuntos dos a dos se tiene simplemente que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Cuando el número de conjuntos no es muy grande, este tipo de resultados se visualizan muy bien por medio de diagramas de Venn: hacerlo, por ejemplo, para $n = 2$, 3 ó 4. Además, como se verá en los problemas, los diagramas de Venn sirven para abordar cuestiones de recuento en las que no se ve una aplicación directa del principio de inclusión-exclusión.

Planteemos ahora un problema diferente, pero en el que también se trata de contar: Jon tiene tres camisas distintas y dos pantalones distintos; ¿de cuántas formas puede vestirse? Enseguida te darás cuenta de que hay precisamente 6 posibilidades. Al fin y al cabo, para cada una de las tres formas de elegir la camisa tenemos dos elecciones de los pantalones, con lo cual el número total de posibilidades es $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2 = 6$. ¿Y si además tiene cuatro pares de zapatos distintos, cuál es ahora el número de posibilidades? Obsérvese que para cada elección que haga de los zapatos, se reduce al problema anterior de camisas y pantalones. Así pues, el número de formas distintas de vestirse es $6+6+6+6 = 6\cdot4 = 3\cdot2\cdot4$. Como vemos, el número total de posibilidades es el producto del número de objetos de cada tipo. Podemos plasmar esta idea matemáticamente en el siguiente enunciado, conocido como *principio multiplicativo*: supongamos que tenemos n conjuntos finitos $A_1, \dots, A_n$, con $k_1, \dots, k_n$ elementos; entonces, el número de posibles formas de elegir un elemento de cada uno de estos conjuntos es el producto $k_1 \dots k_n$.

Es importante observar que para aplicar el principio multiplicativo no es necesario que los conjuntos $A_1, \dots, A_n$ sean disjuntos. Considérese, por ejemplo, el problema de determinar la cantidad de números naturales que tienen exactamente n cifras. Este es un problema de elección: para formar un número hay que elegir cada una de sus cifras. La primera cifra puede ser cualquier número del conjunto $A = \{1, 2, \dots, 9\}$, mientras que las $n-1$ cifras restantes se escogen una a una del conjunto $B = \{0, 1, \dots, 9\}$. Por el principio multiplicativo, la cantidad total de números con n cifras es $9 \cdot 10^{n-1}$.

PROBLEMAS

Antes de pasar a problemas de convocatorias anteriores de olimpiadas matemáticas, vamos a ver algunos problemas más sencillos de calentamiento.

1. Supongamos que una escuela tiene 100 alumnos, de los cuales 40 estudian inglés, otros 40 estudian francés y otros 40 estudian alemán.

(i) Si para cada par de idiomas hay 20 alumnos que los estudian y por otra parte hay 10 alumnos que estudian los tres idiomas, ¿cuántos alumnos no estudian ningún idioma?

(ii) Si hay 20 alumnos que sólo estudian inglés, 20 que sólo estudian francés, 15 que sólo estudian alemán y 10 que estudian inglés y francés (no *solamente* inglés y francés), ¿cuántos alumnos estudian los tres idiomas? ¿Y cuántos alumnos hay que no estudien ningún idioma?

2. Entre los doscientos primeros números naturales, ¿cuántos múltiplos de 3 hay? ¿Y cuántos números hay que sean múltiplos de 2 ó múltiplos de 3? ¿Y que no sean múltiplos de 4, ni de 5 ni de 7?

3. En este problema determinamos la cantidad de números de n cifras que hay con algunas restricciones sobre las cifras que pueden aparecer.

(i) ¿Cuántos números de n cifras satisfacen que todas sus cifras son pares? ¿Y cuántos tienen alguna cifra impar?

(ii) ¿Cuál es la cantidad de números de n cifras en los que aparece algún 1? ¿Y si pedimos que aparezcan al menos un 1, un 3 y un 4?

4. En septiembre de 2000 se estableció el nuevo sistema de matriculación de vehículos en España: cada matrícula consta de una combinación de 4 números del 0 al 9 y de tres letras consonantes escogidas de un conjunto de 20 (se exceptúan la Ñ y la Q). Si estimamos en dos millones el número de vehículos que se vende anualmente en España, ¿cuándo tendrá que plantearse la Dirección General de Tráfico la introducción de un nuevo sistema de matriculación?

Pasemos ahora a problemas de olimpiada.

5. ¿Cuántos números de tres cifras (es decir, mayores que 99 y menores que 1000) hay que tengan su cifra central mayor que las otras dos? ¿Cuántos de ellos tienen además las tres cifras distintas? (Fase nacional, 1965.)

6. En los exámenes de sexto curso de un centro, aprueban la Física, al menos, el 70% de los alumnos; las Matemáticas, al menos, el 75%; la Filosofía, al menos, el 90%; y el Idioma, al menos, el 85%. ¿Cuántos alumnos, al menos, aprueban esas cuatro asignaturas? (Fase nacional, 1970.)

7. Una forma rápida de resolver el problema anterior es utilizar el siguiente resultado: dados n conjuntos finitos cualesquiera $A_1, \dots, A_n$, se tiene que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq \frac{1}{n-1}\,(|A_1| + \cdots + |A_n| - |A_1 \cap \cdots \cap A_n|). \qquad (**)$$

Probar que esta desigualdad es cierta. (¡Es fácil dar un argumento directo, sin pasar por la fórmula $(*)$!) Si los n conjuntos son iguales, es claro que se da la igualdad en $(**)$. ¿Qué debe suceder en general para que se tenga la igualdad en $(**)$? Para cada entero $n \geq 2$, dar un ejemplo de n conjuntos *distintos* $A_1, \dots, A_n$, de $n-1$ elementos cada uno, tales que se satisface la igualdad en $(**)$.

8*. Sea n un entero positivo y sean $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ subconjuntos de un conjunto B. Supongamos que:

(i) Cada A_i tiene exactamente $2n$ elementos.

(ii) La intersección de cada par de conjuntos A_i distintos contiene exactamente un elemento.

(iii) Todo elemento de B pertenece al menos a dos de los conjuntos A_i.

¿Para qué valores de n es posible asignar a cada uno de los elementos de B uno de los valores 0 ó 1 de modo que cada A_i contenga exactamente n elementos con la etiqueta 0? (Olimpiada Matemática Internacional, 1988.)

* Hay ayudas en la página web.