NOTAS

Es una obviedad que si un palomar tiene n nidos y en él duermen $n+1$ palomas, entonces al menos dos palomas duermen en el mismo nido. El planteamiento general de esta idea es lo que se conoce con el nombre de *principio del palomar* (*pigeonhole principle* en inglés), o también como *principio de las cajas* o *principio de Dirichlet*: si m objetos se distribuyen en n conjuntos y $m > n$, entonces hay al menos dos objetos que se encuentran en el mismo conjunto. Igualmente, si $m > 2n$ entonces hay al menos tres objetos en un mismo conjunto y, más en general, si $m > kn$ para un cierto k, entonces hay al menos $k+1$ objetos que se encuentran en un mismo conjunto.

Como veremos a continuación, este principio tan simple permite resolver de forma rápida y elegante numerosos problemas de distinta naturaleza: aritméticos, geométricos, combinatorios, ... La clave en estos problemas es encontrar cuáles son los objetos y cuáles los conjuntos con los que vamos a aplicar el principio del palomar.

Consideremos por ejemplo el siguiente problema: dados $n+1$ números enteros, probar que hay dos que dan el mismo resto al dividir por n. Parece claro que los objetos a distribuir deben ser los $n+1$ números que nos han dado. Por otra parte, a la vista de la conclusión que queremos obtener, consideramos los conjuntos de números enteros que dan un mismo resto al dividir por n. Como sólo hay n posibles restos al dividir por n: $0, 1, \ldots, n-1$, al menos dos de los $n+1$ números en cuestión dan el mismo resto.

Una aplicación de tipo geométrico sería la siguiente: si en un cuadrado de diagonal 3 marcamos al azar 10 puntos, probar que siempre hay al menos dos que se encuentran a una distancia menor o igual que 1. De nuevo, es claro que los objetos a los que deberemos aplicar el principio del palomar son los 10 puntos dados. Lo que no está tan claro es qué conjuntos tomar. La conclusión que busca el problema sugiere dividir el cuadrado en 9 zonas de forma que dos puntos cualesquiera en una misma zona disten a lo sumo 1. Pero esto es muy fácil de conseguir, ¿verdad?

PROBLEMAS

1. Supongamos que se han escogido $n+1$ números enteros cualesquiera. El ejemplo que hemos visto en el apartado *Notas* prueba que siempre hay dos de ellos cuya diferencia es divisible por n.

(i) Dar un ejemplo que muestre que no es siempre posible encontrar dos de esos números tales que su suma sea divisible por n.

(ii) Probar sin embargo que existen dos *o más* de esos números cuya suma es divisible por n. (Olimpiada Matemática Británica, 1966.)

2. Sea n un número natural. Probar que, dados $n+2$ números enteros cualesquiera, siempre hay dos tales que bien su suma, bien su diferencia es divisible por $2n$. Ver que el resultado deja de ser cierto si en lugar de $n+2$ números se toman $n+1$. (Olimpiada Matemática Británica, 1966.)

3*. De entre los $2n$ números $1, 2, 3, \ldots, 2n$ se eligen de cualquier forma $n+1$ números distintos. Demostrar que entre los números elegidos hay por lo menos dos tales que uno divide al otro. (Fase nacional, 1971.)

4. Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales? (Fase nacional, 1999.) ¡Cuidado, la respuesta correcta no es 55!

5. Supongamos que en un círculo de radio 1 tenemos siete puntos tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es siempre mayor o igual que 1. Probar que uno de esos siete puntos es el centro del círculo. (Olimpiada Matemática Británica, 1975.)

6*. Dados diez puntos en un círculo de diámetro 5, probar que hay dos de ellos que se encuentran a una distancia menor que 2. (Olimpiada Matemática Británica, 1983.)

7*. Probar que en una reunión de seis personas siempre hay bien tres personas que se conocen entre sí, bien tres personas que no se conocen entre sí.

8*. Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo 3×7. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo. (Fase nacional, 1994.) Ver que el resultado no es cierto si disponemos 18 fichas en un tablero 3×6.

No todos los problemas cuyo enunciado parece sugerir aplicar el principio del palomar se pueden resolver fácilmente de este modo. El siguiente problema es un ejemplo de ello: si intentáis usar el principio del palomar encontraréis serias dificultades a la hora de hallar conjuntos adecuados para distribuir los puntos. Sin embargo, se puede conseguir una solución rápida con un argumento puramente geométrico.

9. Tomemos cuatro puntos situados en el interior o el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a una distancia menor o igual que 1. (Fase nacional, 2000)

* Hay ayudas en la página web.