NOTAS

Se añadirán más adelante.

PROBLEMAS

1. Un número de tres cifras se escribe xyz en el sistema de base 7 y zyx en el sistema de base 9. ¿Cuál es el número? (Fase nacional, 1965–66)

2. Calcular la suma de n sumandos $7 + 77 + 777 + \cdots + 7\ldots7$. (Fase nacional, 1980–81)

3. Determinar un número de cinco cifras tal que su cuadrado termine en las mismo cinco cifras colocadas en el mismo orden. (Fase nacional, 1983–84)

4. Probar que los binomios $25x + 31y$ y $3x + 7y$ son múltiplos de 41 para los mismos valores enteros de x e y. (Fase nacional, 1987–88)

5. Sea la sucesión (progresión aritmética) 3, 7, 11, 15, ... Demostrar que en dicha sucesión hay infinitos números primos. (Fase nacional, 1991–92)

6. Demostrar que todo número primo p distinto de 2 y de 5 tiene infinitos múltiplos escritos sólo con unos (es decir, de la forma $111\ldots1$). (Fase nacional, 1992–93)

7. Hallar las soluciones enteras de la ecuación $p(x + y) = xy$ donde p es un número primo. (Fase nacional, 1994–95)

8. ¿Existe alguna potencia de 2, que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2 distinta? Justificar la respuesta. (Fase nacional, 2003–04)

9. Hallad las cuatro últimas cifras de 3^{2004}. (Fase nacional, 2003–04)

10. Probar que cualquier número mayor que 1 y que no sea una potencia de 2 puede escribirse como la suma de dos o más enteros consecutivos. (M. Rosenlicht)

11. Si tenemos una balanza y n pesas de 1, 3, 3^2, ..., 3^{n-1} libras, respectivamente, demostrar que, colocando pesas en cualquiera de los dos platillos, es posible determinar el peso de cualquier objeto de N libras, donde N es un entero, $1 \leq N \leq \frac{1}{2}(3^n - 1)$. (M. Rosenlicht)

12. La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días, y 30, en 60 días. ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en 96 días? (*Álgebra recreativa*, Y. I. Perelman).