## *NOTAS*

Una ecuación funcional es aquella cuya incógnita es una función, que debe determinarse en todo su dominio.

Algunos ejemplos básicos son los siguientes:

1) Determinar todas las funciones tales que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Si el dominio está formado sólo por números racionales, las únicas soluciones son del tipo $f(x) = k \cdot x$, donde $k$ es una constante arbitraria.
2) Determinar todas las funciones continuas en $\mathbb{R}$ tales que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. En este caso, las posibles soluciones (aparte de la trivial $f \equiv 0$) son las funciones del tipo $f(x) = e^{kx}$.

Ejemplos similares pueden plantearse con las condiciones $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ o bien $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, cuyas soluciones son también funciones conocidas.

Nuevamente, las técnicas utilizadas para resolver este tipo de problemas son distintas según se trate de funciones definidas sobre los naturales, enteros, racionales o reales.

## *PROBLEMAS*

**1.** *Determinar todas las funciones* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *que verifican las condiciones* $f(2) = 2$, $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ *y* $f(m) > f(n)$, *si* $m > n$.

**2.** (Fase Nacional, 2000) *Demostrar que no existe ninguna función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que cumpla* $f(f(n)) = n + 1$.

**3.** (España, 1998) *Hallar todas las funciones* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente crecientes y tales que:*

$$f(n + f(n)) = 2f(n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

**4.** (Primera Fase, 1996) *Para cada número real* $x$, *se define* $[x]$ *como el mayor entero que es menor o igual que* $x$. *Si definimos*

$$q(x) = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right], \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

*determinar todos los enteros positivos* $n$ *tales que* $q(n) > q(n+1)$.

**5.** (Primera Fase, 2000) *Se considera la función* $f(x) = ax + b$, *donde* $a, b$ *son números reales y* $x$ *es una variable real. ¿Para qué valores de* $a$ *y* $b$ *se verifica que la composición* $f(f(f(\ldots(x)\ldots)))$ *(2000 veces) sea igual a* $x$*?*

**6.** (España, 2002) *Hallar todos los polinomios* $P(t)$ *de una variable, que cumplen:*

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y) \cdot P(x-y),$$

*para todos los números reales* $x$ *e* $y$.

**7.** (Ibero, 1987) *Encontrar una función* $f$ *tal que* $[f(x)]^2 \cdot f\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big) = 64x$ *para* $x \neq 0, \pm 1$.

**8.** *Hallar todas las funciones* $f(x)$ *tales que*

$$3f(2-x) + 2f(x) = x^2.$$

**9.** *Resolver la ecuación funcional*

$$x^2 - 2f(x) = f\Big(\frac{1}{x}\Big), \ x \neq 0.$$

**10.** *Resolver la ecuación funcional*

$$x - \frac{1}{2}f(x) = f\Big(\frac{x}{3x-1}\Big), \ x \neq 1/3.$$

**11.** *Hallar las funciones* $f(x)$, *definidas para todo* $x \neq \pm 1/3$, *tales que*

$$f\Big(\frac{x-1}{1+3x}\Big) = \frac{x+1}{1-3x} - f\Big(\frac{x+1}{1-3x}\Big).$$

**12.** *Hallar las funciones* $f : R - \{0,1\} \to R$ *tales que*

$$f(x) + f\Big(\frac{x-1}{x}\Big) = 1 + x.$$

**13.** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ *una función que verifica* $f(x+2) = f(x-1) \cdot f(x+5)$. *Probar que* $f$ *es periódica.*

**14.** (España, 2002) *Se define sobre los naturales una función $g$ que verifica:*
$g(2) = 1$;
$g(2n) = g(n)$;
$g(2n+1) = g(2n) + 1$.
*Sea $n$ un número natural tal que $1 \leq n \leq 2002$. Calcular el valor máximo $M$ de $g(n)$ y calcular cuántos valores de $n$ verifican $g(n) = M$.*

**15.** (Ibero, 1989) *Se considera una función $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ que verifica $f(1) = 1$, $f(2n+1) = f(2n) + 1$ y $f(2n) = 3f(n)$. Encontrar todos los valores de $m$ tales que $m = f(n)$ para algún $n$.*

**16.** (Ibero, 1990) *Se define la función $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ por $f(2^n - 1) = 0$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$, y $f(m) = f(m+1) + 1$, si $m \neq 2^n - 1$. Probar que $f(n) + n = 2^k - 1$ para algún $k$, y encontrar $f(2^{1990})$.*