NOTAS

Una ecuación algebraica es aquella que involucra operaciones algebraicas con una o varias variables y cuyo objetivo es obtener los posibles valores que toman dichas variables. Las técnicas de resolución difieren según las variables sean enteras, racionales o reales. Por ejemplo, la regla de Cramer permite resolver sistemas lineales.

Los ejercicios que siguen son una muestra de los diferentes tipos de ecuaciones que pueden resolverse sin excesivos conocimientos técnicos.

PROBLEMAS

1. (Ibero, 1985) *Encontrar todas las soluciones enteras del sistema*

$$a+b+c=24,\ \ a^2+b^2+c^2=210, abc=440.$$

2. (Ibero, 1988) *Supongamos que* $k^3=2$ *y llamamos* x,y,z *a tres números racionales tales que* $x+yk+zk^2\neq 0$. *Probar que existen* u,v,w *racionales, tales que*

$$(x+yk+zk^2)(u+vk+wk^2)=1.$$

3. (Ibero, 1985) *Sean* $x,\ y,\ z$ *números reales tales que* $x,y\neq 1$, $x\neq y$, $\dfrac{yz-x^2}{1-x}=\dfrac{xz-y^2}{1-y}$. *Probar que*

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=x+y+z.$$

4. (Ibero, 1989) *Encontrar todas las soluciones reales del sistema:*

$$\begin{aligned} x+y-z&=-1,\\ x^2-y^2+z^2&=1,\\ -x^3+y^3+z^3&=-1.\end{aligned}$$

5. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2, \end{aligned}$$

siendo a y b constantes. Dar condiciones sobre a y b para que las soluciones del sistema sean números positivos diferentes.

6. (España, 1996) *Discutir la existencia de soluciones reales x de la ecuación*

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

según los valores reales del parámetro p, y resolverla en aquellos casos en que tenga solución.

7. *Demostrar que, si*

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,$$

entonces $x+y=0$.

8. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x\cdot|x|+y\cdot|y| &= 1 \\ [x]+[y] &= 1 \end{aligned}$$

(donde $|\cdot|$ representa el valor absoluto y $[\cdot]$ representa la parte entera).