NOTAS

Supongamos que en una caja hay n objetos distintos (si se quiere, se puede pensar que son n bolas numeradas de 1 a n). Dado un valor k, ¿de cuántas formas distintas se pueden extraer k objetos de la caja? Para poder responder adecuadamente a esta pregunta hay que precisar cómo se realizan las extracciones (si después de cada extracción el objeto se devuelve a la caja o no) y qué se entiende por extracciones distintas (si debe tenerse en cuenta el orden de la extracción o no). Resultan así cuatro casos:

(i) Extracciones con reemplazamiento teniendo en cuenta el orden de la extracción. En cada una de las k extracciones hay n posibilidades, por lo tanto, el número de posibles resultados es n^k. (Se llaman *variaciones con repetición* de n elementos tomados de k en k.)

(ii) Extracciones sin reemplazamiento teniendo en cuenta el orden de la extracción. Para la primera extracción hay n posibilidades, para la segunda $n-1$, para la tercera $n-2$, etc. Para la última (la k-ésima) el número de posibilidades es $n-k+1$. El número total de posibles resultados es entonces $n(n-1)\dots(n-k+1)$. (Se llaman *variaciones sin repetición* de n elementos tomados de k en k.) El caso $k=n$ es especialmente destacable. Es el número de posibles ordenaciones (o *permutaciones*) de n objetos distintos. Su valor $n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1$ se llama *factorial* de n y se denota $n!$.

(iii) Extracciones sin reemplazamiento sin tener en cuenta el orden de la extracción. Las extracciones son como en el caso (ii) pero ahora dos resultados que sólo difieran en el orden se consideran iguales. Por ejemplo, si estamos extrayendo bolas numeradas de 1 a 8 y $k=5$ los resultados $4,6,1,7,2$ y $7,2,6,1,4$ se consideran el mismo. Como hay $k!$ formas de ordenar k objetos, el número que nos interesa es el del caso (ii) (variaciones sin repetición) dividido entre $k!$. Este número se llama *combinaciones* de n elementos tomados de k en k y se denota

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(iv) Extracciones con reemplazamiento sin tener en cuenta el orden de la extracción. Se llaman *combinaciones con repetición*. Ver el problema 1 para encontrar cómo se calculan.

Los números combinatorios surgen de forma natural al calcular las potencias de una suma. La fórmula que se obtiene es la llamada *fórmula del binomio de Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Cuando jugamos a un juego en el que hay n posibles resultados y k de ellos nos hacen ganadores, el cociente k/n es la *probabilidad* que tenemos de ganar. En general, si un suceso puede ocurrir de n formas distintas y seleccionamos k de ellas, el cociente k/n (casos favorables entre casos posibles) es la *probabilidad* de que suceda uno de los casos señalados.

PROBLEMAS

1. Ver que en cada uno de los casos siguientes se está contando en realidad lo mismo:

(i) Formas de extraer con reemplazamiento k objetos de entre n, sin importar el orden de la extracción (es decir, combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k).

(ii) Formas de pintar k objetos iguales con n colores (no tienen por qué usarse necesariamente los n colores).

(iii) Número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n = k$.

(iv) Dados $n + k - 1$ segmentos de longitud unidad, formas de elegir $n - 1$ de ellos.

Deducir de (iv) una fórmula para el número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

2. Se coloca una ficha en la casilla superior izquierda de un tablero de ajedrez (8×8). En cada momento, la ficha se puede mover una casilla hacia la derecha o hacia abajo. ¿Cuántos posibles caminos hay hasta la casilla inferior derecha?

3. Las calles de una ciudad forman una cuadrícula con tres calles longitudinales paralelas (numeradas 1, 2 y 3) y 6 transversales (indicadas por las letras a, b, c, d, e y f). Una persona comienza a caminar en el cruce de las calles 1 y a. Para decidir cada paso, tira un dado: si sale un múltiplo de 3, avanza un tramo longitudinal y, en caso contrario, uno transversal. El paseo termina la primera vez que no pueda avanzar en el sentido deseado. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue al cruce de las calles 3 y f? (Fase local, 1965)

4*. Se considera la cuadrícula en el plano formada por los puntos con coordenadas enteras limitada por los cuatro vérices $(0, 0)$, $(0, m)$, $(n, 0)$ y (n, m). Se hace un corte en esta cuadrícula siguiendo los puntos $(0, k)$, $(1, k - 1) \ldots, (k, 0)$ (k es un número natural menor que n y m). Calcular el número de posibles formas de ir desde el punto $(0, m)$ hasta $(n, 0)$ avanzando siempre hacia la derecha o hacia abajo en el interior de la región cuadriculada que ha quedado (se entiende que los puntos por los que se ha hecho el corte también se han eliminado).

Aplicando el problema anterior no es difícil resolver los dos problemas siguientes de olimpiadas.

5. La sociedad *Peces de Ferro S.A.* tiene 9 accionistas que han de elegir a Juan o Pedro como presidente. Es sabido que seis de ellos votarán a Juan y los otros tres a Pedro. Encontrar la probabilidad de que durante todo el escrutinio, Juan vaya siempre por delante de Pedro. (Fase local, 1988)

6. Un avión de la compañía "Air Disaster" debe realizar un viaje entre dos ciudades con un total de $m+n$ escalas. En cada escala el avión deberá cargar o descargar una tonelada de cierta mercancía, realizándose cargas en m de las escalas y descargas en las n restantes. En la compañía nadie ha observado que el avión no soporta una carga mayor que k toneladas ($n < k < m+n$), y las escalas de carga y descarga se han distribuido al azar. Sabiendo que el avión parte con n toneladas de mercancías, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a su destino? (Fase local, 1994)

7*. Demostrar la igualdad

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(Fase nacional, 1979)

8. Se consideran todos los números naturales entre 1 y 10^n. Calcular en función de n la probabilidad de elegir al azar un múltiplo de 2 o de 3. (Fase local, 1975)

9. El programa de una asignatura consta de n preguntas; el examen consiste en dar la respuesta a una de las preguntas elegida al azar. Un alumno sólo se sabe una pregunta, pero puede repetir el examen n veces. Expresar en función de n la probabilidad p_n de que el alumno apruebe finalmente la asignatura. ¿Qué sucede si n aumenta? (Fase nacional, 1989)

10*. En una urna hay n bolas numeradas de 1 a n.

(i) Si extraemos tres bolas juntas de la urna, calcular la probabilidad de que no aparezcan dos números consecutivos.

(ii) Demostrar que si extraemos m bolas juntas, la probabilidad de que no aparezcan dos números consecutivos es

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

(Fase local, 1994)

11*. Escogemos un número natural n y pedimos a r personas que escojan al azar un subconjunto de $\{1,\ldots,n\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que los r subconjuntos seleccionados sean disjuntos dos a dos? (Dos conjuntos se dicen *disjuntos* cuando no tienen elementos en común.) (Fase local, 1995)

---

* Hay ayudas en la página web.