OHARRA: Azterketako garapen eta emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira. Azterketaren iraupena: 3 ordu

1.- $a_n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}-1\right)}{n^a}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ **gai orokorra emanik,**

a) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **seriearen izaera.** **(1.5 puntu)**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}-1}{n^a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}\right)}{n^a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^a} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+2}} = \begin{cases} 0 & \forall a > -2 \\ 1 & a = -2 \\ \infty & \forall a < -2 \end{cases}$$

b) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \Rightarrow$ konparaziozko irizpidea erabiliz, aurrekoaren arabera:

$$a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+2}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konbergentea } \forall a \quad / \quad a+2>1 \quad \Leftrightarrow \quad a>-1 \\ \text{dibergentea } \forall \alpha \quad / \quad a+2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq -1 \end{cases}$$

2.- a) Kalkulatu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{3n+2}}{8^n}$ **berretura-seriearen konbergentzi arloa eta batura.**

b) Kalkulatu aurreko atalean lortutako funtzioaren 14. mailako deribatuaren balioa $x=0$ **puntuan.** **(Puntu 1)**

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{3n+2}}{8^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 \cdot \left(-\dfrac{x^3}{8}\right)^n$ serie geometrikoa da, arrazoia $r = -\dfrac{x^3}{8}$ delarik.

Beraz, konbergentea da $\Leftrightarrow \quad |r| = \left|-\dfrac{x^3}{8}\right| = \left|\dfrac{x^3}{8}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$. Orduan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{3n+2}}{8^n} = \frac{x^2}{1+\frac{x^3}{8}} = \frac{8x^2}{8+x^3} \quad \forall x \in (-2,2)$$

b) Izan bedi $f(x) = \dfrac{8x^2}{8+x^3}$, aurreko atalean lortutako berretura-seriearen batura, beraz, emandako seriea funtzio honen berretura-seriezko garapena da, Taylor-en seriea hain zuzen ere. Hori dela eta, garapen horretan, $n=4$ egiten badugu:

$$\frac{x^{14}}{8^4} = \frac{f^{14)}(0)}{14!} \cdot x^{14} \quad \Leftrightarrow \quad f^{14)}(0) = \frac{14!}{8^4}$$

3.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{1}{\arcsin(xy)}+\mathrm{L}(x^2+y^2-1)+\sqrt{4-x^2-y^2}$$

(Puntu 1)

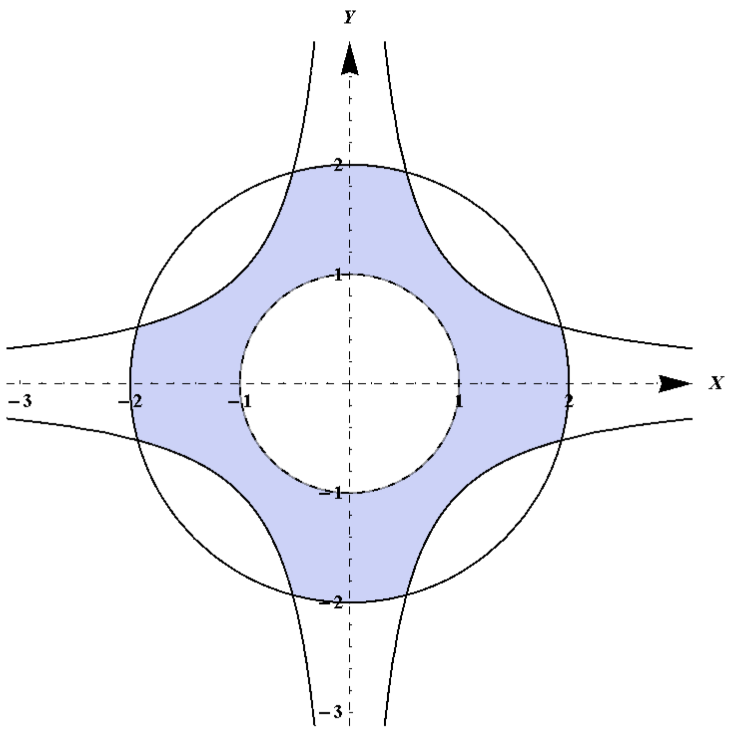
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \arcsin(xy)\neq 0,\ -1\leq xy\leq 1,\ x^2+y^2-1>0,\ 4-x^2-y^2\geq 0\right\}$$

$$\arcsin(xy)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad xy\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2>1$$

$$4-x^2-y^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2\leq 4$$

$$-1\leq xy\leq 1$$



4.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik, aztertu bere jarraitutasuna eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

(1.75 puntu)

Jarraitutasunaren ikasketarekin hasita:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^2}\overset{(1)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\sin\left(\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\cos^3\theta}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\rho\cdot\cos\theta=0=f(0,0)\quad\Rightarrow\quad f \text{ jarraitua da } (0,0).$$

(1) Polarretan adierazita: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases}\quad \forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$

Diferentziagarritasuna aztertzeko, deribatu partzialak kalkulatzen hasiko gara:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{\sin\left(h^3\right)}{h^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{h^3}{h^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3}{h^3}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\dfrac{0}{k^2}}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k^3}=0$$

Eta, orain, BBN erabiliz:

f diferentziagarria (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\sin\left(h^3\right)}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\dfrac{\sin\left(\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)}{\rho^2}-\rho\cdot\cos\theta}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\sin\left(\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)-\rho^3\cdot\cos\theta}{\rho^3}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{3\rho^2\cdot\cos^3\theta\cdot\cos\left(\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)-3\rho^2\cdot\cos\theta}{3\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\left(\cos^3\theta\cdot\cos\left(\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)-\cos\theta\right)\neq0$$

$$=\cos^3\theta-\cos\theta\neq0$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\cos^3\theta}{\rho^3}-\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\cos\theta=\cos^3\theta-\cos\theta\neq0$$

Beraz, f ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

(2) Polarretan adierazita: $\begin{cases} h=\rho\cdot\cos\theta \\ k=\rho\cdot\sin\theta \end{cases}\quad \forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$

(*) L´Hopital erabili beharrean, honela ere kalkula daiteke limite hau:

$$\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}} \frac{\sin\left(\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)-\rho^3\cdot\cos\theta}{\rho^3} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}} \frac{\sin\left(\rho^3\cdot\cos^3\theta\right)}{\rho^3} - \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}} \frac{\rho^3\cdot\cos\theta}{\rho^3} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}} \frac{\rho^3\cdot\cos^3\theta}{\rho^3} - \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}} \frac{\rho^3\cdot\cos\theta}{\rho^3} = \cos^3\theta - \cos\theta \neq 0$$

5.- $\displaystyle\int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^4}$ **integrala emanik,**

a) ***b*** **parametroaren zein baliotarako inpropioa da?**

b) **Kalkulatu integral hori** $b=\infty$ **kasurako.**

(0.75 puntu)

a) $\displaystyle\int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{b} f(x)dx$ inpropioa da hauetako kasuren bat ematen bada:

- Integrazio-tartea infinitua bada $\Leftrightarrow$ $b=\infty$
- f mugatuta ez badago integrazio eremuan $\Leftrightarrow$ $0\in[-1,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall b\geq 0$

b) $b=\infty$ kasurako bi puntu singular daudenez, integrala deskonposatu behar dugu:

$$I = \int_{-1}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx = I_1 + I_2 + I_3$$

Eta I konbergentea da $\Leftrightarrow$ I_1, I_2 eta I_3 konbergenteak dira.

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}\Bigg|_{-1}^{0} = \infty \quad\Rightarrow\quad I_1 \text{ dibergentea da} \quad\Rightarrow\quad I \text{ dibergentea da}.$$

Eta $f(x)=\dfrac{1}{x^4}>0 \quad \forall x \quad\Rightarrow\quad I=\infty$

6.- Lantegi batean isuri kimikoa gertatu da. Lekuaren kutsadura-maila $f(x,y)=e^{-x^2-(y-1)^2}$ funtzioak adierazten du, (x,y) planoko puntuan. $P(2,1)$ eta $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuetan langile bana dago.

a) Zein da kutsadura-maila leku horietan? Zein da *P* eta *Q* puntuetako kutsadura-maila berdineko puntuek definitzen duten leku geometriko? Marraztu.

b) Zein norabide eta noranzko aukeratuko dute *P* eta *Q* puntuetan dauden langileek, kutsadura-maila ahalik eta arinen jaisteko? Marraztu norabide hauek.

(1.25 puntu)

a) Kutsadura-maila:

$P(2,1)$ puntuan $f(P)=e^{-4}$

$Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuan $f(Q)=e^{-\frac{1}{2}}$

Eta puntu hauetan dagoen kutsadura-maila berdineko puntuek definitzen duten leku geometriko:

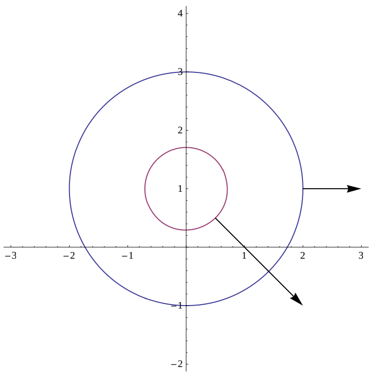
$P(2,1)$ puntuari dagokiona $f(x,y)=e^{-x^2-(y-1)^2} = f(P)=e^{-4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2+(y-1)^2=4 \\ f(x,y)=e^{-4} \end{cases}$

$Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuari dagokiona $f(x,y)=e^{-x^2-(y-1)^2} = f(Q)=e^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2+(y-1)^2=\frac{1}{2} \\ f(x,y)=e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

b) Kontuan hartuta *f* funtzio diferentziagarria dela, *P* eta *Q* puntuetan dauden langileek aukeratu behar duten norabidea eta noranzkoa kutsadura-maila ahalik eta arinen jaisteko $-\overrightarrow{\nabla f}$ da.

$$f(x,y)=e^{-x^2-(y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} f'_x=-2xe^{-x^2-(y-1)^2} \\ f'_y=-2(y-1)e^{-x^2-(y-1)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} f'_x(P)=-4e^{-4} \\ f'_x(Q)=-e^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} f'_y(P)=0 \\ f'_y(Q)=e^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\overrightarrow{\nabla f}(P)=\left(\frac{4}{e^4},0\right) \\ -\overrightarrow{\nabla f}(Q)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{-1}{\sqrt{e}}\right) \end{cases}$$



7.- $F(x,y,z)=2x^3-3x^2-y^2+2xyz^3-z+1=0$ **ekuazioa emanik,**

a) Eztabaidatu ea $P(x,y,z)=(1,0,0)$ **puntuaren ingurune batean ekuazio horrek *x* eta *y* aldagaiko *z* funtzio inplizitua definitzen ote duen (** $z=z(x,y)$ **).**

b) $(x,y)=(1,0)$ **puntua** $z=z(x,y)$ **funtzioaren muturra da? Arrazoitu erantzuna.**

(1.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz:

i. $F(P)=0$

ii. $F'_x=6x^2-6x+2yz^3$ $F'_y=-2y+2xz^3$ $F'_z=6xyz^2-1$ existitzen eta jarraituak dira $P(x,y,z)=(1,0,0)$ puntuaren ingurunean.

iii. $F'_z(P)=-1\neq 0$

Beraz, $P(x,y,z)=(1,0,0)$ puntuaren ingurunean $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria, $z(1,0)=0$ izanik.

b) P puntua $z=z(x,y)$ funtzioaren muturra denentz jakiteko, has gaitezen aztertzen puntu kritikoa ote den.

$F(x,y,z(x,y))=2x^3-3x^2-y^2+2xyz^3-z+1=0$ ekuazioa *x*-rekiko eta *y*-rekiko dribatuz:

(1) $6x^2-6x+2yz^3+\left(6xyz^2-1\right)\cdot z'_x=0 \overset{P\text{ puntuan}}{\Rightarrow} z'_x(1,0)=0$

(2) $-2y+2xz^3+\left(6xyz^2-1\right)\cdot z'_y=0 \overset{P\text{ puntuan}}{\Rightarrow} z'_y(1,0)=0$

Beraz, P puntu kritikoa da. Orain, sailkatzeko, bigarren mailako deribatu partzialak kalkulatu behar ditugu:

(1) ekuazioan *x*-rekiko deribatuz:

$$12x-6+6yz^2\cdot z'_x+\left(6yz^2+12xyz\cdot z'_x\right)\cdot z'_x+\left(6xyz^2-1\right)\cdot z''_{x^2}=0 \overset{P\text{ puntuan}}{\Rightarrow} z''_{x^2}(1,0)=6$$

Era beran, (1) ekuazioan *y*-rekiko deribatuz:

$$2z^3+6yz^2\cdot z'_y+\left(6xz^2+12xyz\cdot z'_y\right)\cdot z'_x+\left(6xyz^2-1\right)\cdot z''_{xy}=0 \overset{P\text{ puntuan}}{\Rightarrow} z''_{xy}(1,0)=0$$

Eta, bukatzeko, (2) ekuazioan *y*-rekiko deribatuz:

$$-2+6xz^2\cdot z'_y+\left(6xz^2+12xyz\cdot z'_y\right)\cdot z'_y+\left(6xyz^2-1\right)\cdot z''_{y^2}=0 \overset{P\text{ puntuan}}{\Rightarrow} z''_{y^2}(1,0)=-2$$

Beraz, $d^2z(1,0)=6(dx)^2-2(dy)^2 \gtrless 0 \Rightarrow P$ zeladura puntua da (ez da, beraz, muturra)

OHARRA: Sylvester-en irizpidea erabiliz:

$$Hz(1,0)=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\Delta_1=6>0\\ \Delta_2=-2<0 \Rightarrow P \text{ zeladura puntua}\end{cases}$$

8.- $\vec{F}(x,y) = x^2 y\cdot\vec{i} + \dfrac{x^3}{3}\cdot\vec{j}$ **bektorea,** $C \equiv \sqrt{x+y} + xy = 1$ **kurba eta** ***A*(0,1) eta *B*(1,0) puntuak emanik, kalkulatu** $\vec{F}$ **bektorearen lerro-integrala** ***A*-tik *B*-ra.**

(Puntu 1)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(x^2 y\cdot dx + \frac{x^3}{3}\cdot dy \right)$$

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $D = \mathbb{R}^2$ eremu sinpleki konexuan. Eta $X'_y = x^2 = Y'_x$ (non $\vec{F}(x,y) = X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j}$). Beraz, $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea da. Izan bedi, orduan, $C' \equiv \overline{AB} \equiv y = 1-x,\ 0 \le x \le 1$, bide berria:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C'} \left(x^2 y\cdot dx + \frac{x^3}{3}\cdot dy \right) = \int_0^1 \left(x^2(1-x) - \frac{x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right)_0^1 = 0$$

9.- $V \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 \le y \le x\sqrt{3} \\ 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2 \end{cases}$ **solidoa emanik,**

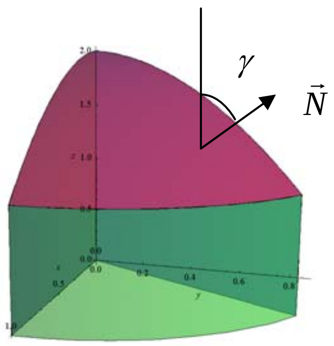
a) Kalkulatu *V*-ren bolumena.

b) Kalkulatu *V*-ren muga osatzen duen $z = 2 - x^2 - y^2$ **gainazalaren zatiaren azalera.**

c) Kalkulatu *V*-ren muga osatzen duen $z = 2 - x^2 - y^2$ **gainazalaren zatitik irteten den** $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, 2z)$ **bektorearen fluxua.**

(2.25 puntu)

a)



$$x^2 + y^2 = 1 \cap z = 2 - x^2 - y^2 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Zilindrikoetan:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \\ z = z \end{cases}$$

$$V \equiv \begin{cases} \rho \le 1 \\ 0 \le \sin\theta \le \sqrt{3}\cdot\cos\theta \\ 0 \le z \le 2 - \rho^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le z \le 2 - \rho^2 \end{cases}$$

Beraz, $BOL(V)=\int_0^{\pi/3}\int_0^1\int_0^{2-\rho^2}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi}{3}\int_0^1\rho\left(2-\rho^2\right)d\rho=\frac{\pi}{3}\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

b) V-ren muga osatzen duen $z=2-x^2-y^2$ gainazalaren zatia honako hau da:

$$S\equiv z=2-x^2-y^2\quad\forall(x,y)\in R_{xy}\equiv\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ 0\le y\le x\sqrt{3}\end{cases}$$

Orduan, bere azalera:

$$Azalera(S)=\iint_S dS=\iint_{R_{xy}}\left|\vec{N}\right|dxdy$$

non $\vec{N}=(2x,2y,1)\quad\Rightarrow\quad\left|\vec{N}\right|=\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$

Eta, polarretan adieraziz:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\quad |J|=\rho\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}R_{xy}\equiv R_{\theta\rho}\equiv\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le\pi/3\end{cases}\\ \left|\vec{N}\right|=\sqrt{1+4\rho^2}\end{cases}$$

Orduan: $Azalera(S)=\int_0^{\pi/3}\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi}{3}\left.\frac{\left(\sqrt{1+4\rho^2}\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right|_0^1=\frac{\pi}{36}\left(5^{3/2}-1\right)$

c) Aurreko atalean definituriko S gainazal berdinerako, $\vec{F}(x,y,z)=(y,-x,2z)$ bektorearen fluxua honako integralak ematen du:

$$\iint_S\vec{F}\cdot dS=\pm\iint_{R_{xy}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy=\pm\iint_{R_{xy}}2\left(2-x^2-y^2\right)dxdy\overset{(1)}{=}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 2\rho\left(2-\rho^2\right)d\rho\,d\theta=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1\rho\left(2-\rho^2\right)d\rho=\frac{2\pi}{3}\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)_0^1=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

(1) Polarretan, aurreko atalean bezala. Eta, kontuan harturik, $\gamma<\frac{\pi}{2}$