Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	Guztira

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$

(0.75 puntu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)-\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}}\right)}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-(n-1)}=1$$

(*) $\left\{\sqrt{n}\right\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz erabil daiteke.

2.- Izan bitez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ non $a_n \geq 0$ eta $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Baldin $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$, orduan $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ izan daiteke?

b) Baldin $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$, orduan $a_n \sim b_n$?

c) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seriearen maiorantea bada eta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$, zer esan daiteke bi serieen izaerari buruz?

d) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seriearen minorantea bada eta $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, zer esan daiteke bi serieen izaerari buruz?

(Puntu 1)

a) Baldin $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da (D´Alambert). Beraz, B.B. bete behar da, orduan ezin da $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ izan.

b) $a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Beraz, a_n eta b_n ez dira baliokideak.

c) Baldin $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da (D´Alambert). Eta aurreko puntuan azaldu dugunez, $b_n \leq a_n$ denez, orduan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ere konbergentea da

d) Baldin $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da. Eta $a_n \leq b_n$ denez, orduan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ere dibergentea da.

3.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{3n}}{3n}$ berretura-seriearen konbergentzi arloa, eta kalkulatu bere batura.

(1.75 puntu)

Balio absolutuen serieari D´Alambert-en irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|^{3n+3}}{3n+3}}{\frac{|x|^{3n}}{3n}}=|x|^3<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x<1$$

Baldin $x=-1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{4n+1}}{3n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3n}$ dibergentea da.

Baldin $x=1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}$ baldintzaz konbergentea da (Leibniz).

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{3n}}{3n}$ konbergentea da $\forall x\in\left(-1,1\right]$.

Ondorioz, $\exists S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{3n}}{3n} \quad \forall x\in\left(-1,1\right]$

Eta $\exists S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^{3n-1}\overset{(*)}{=}\frac{x^2}{1+x^3} \quad \forall x\in(-1,1)$

(*) Serie geometrikoa da, bere arrazoia $r=-x^3$

Beraz, $S(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1+t^3}dt\overset{(S(0)=0)}{=}\frac{1}{3}\mathrm{L}\left(1+x^3\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{3n}}{3n} \quad \forall x\in(-1,1)$

Gainera, $\begin{cases} x=1 \text{ puntuan } \exists S \text{ jarraitua} \\ x=1 \text{ puntuan } \exists f(x)=\frac{1}{3}\mathrm{L}\left(1+x^3\right) \text{ jarraitua} \\ f(x)=S(x) \quad \forall x\in(-1,1) \end{cases}$.

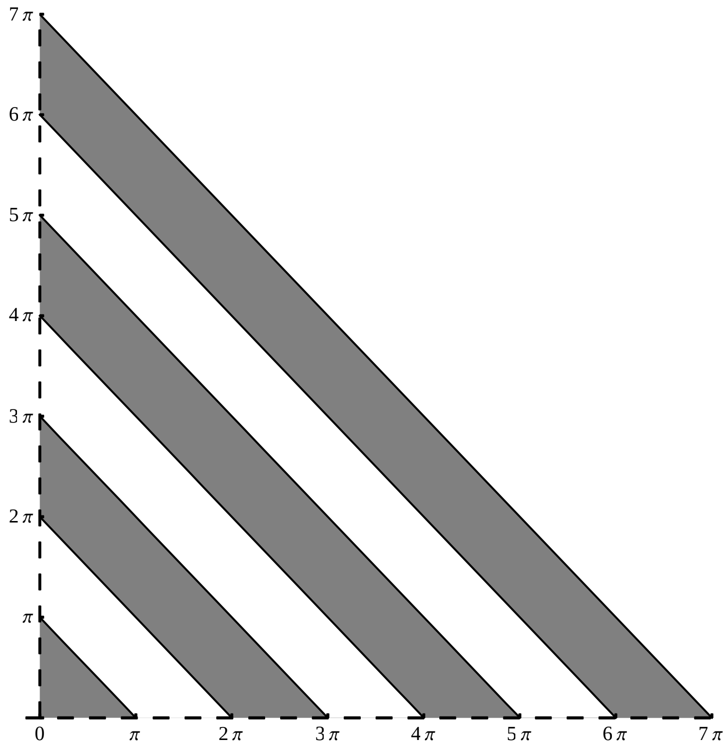
Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{3n}}{3n}=\frac{1}{3}\mathrm{L}\left(1+x^3\right) \quad \forall x\in\left(-1,1\right]$

4.- Aurkitu, analitiko eta grafikoki, $f(x,y)=\sqrt{\sin(x+y)}+\frac{\mathrm{L}x}{\sqrt{y}}$ **funtzioaren definizio-eremua**

(1.5 puntu)

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x>0,\ y>0, \sin(x+y)\geq 0\right\}$

$$\sin(x+y)\geq 0 \underset{(x>0,y>0)}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} x+y\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left[2k\pi,(2k+1)\pi\right] \Leftrightarrow 2k\pi\leq x+y\leq(2k+1)\pi \quad \forall k\in\mathbb{N}$$



5.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

- **a) Estudiatu,** $(0,0)$ **puntuan, *f*-ren jarraitutasuna.**
- **b) Estudiatu,** $(0,0)$ **puntuan, *f*-ren diferentziagarritasuna.**
- **c) Kalkulatu,** $(0,0)$ **puntuan, bere deribatu direkzionalak** $y-2x=3$ **zuzenaren norabidean.**

(2 puntu)

a)) *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$. Hau da:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\rho\cdot\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)=0=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) Deribatu partzialak existitzen direla frogatzen hasiko gara:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}-0}{k}=1$$

Eta orain diferentziagarritasunerako B.B.N erabiliz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}-h-k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\cancel{h^3}+\cancel{k^3}-\cancel{h^3}-h^2k-k^2h-\cancel{k^3}\right|}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\left|\cos^2\theta\cdot\sin\theta+\sin^2\theta\cdot\cos\theta\right|}{\rho^3}=$$

$$=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\left|\cos^2\theta\cdot\sin\theta+\sin^2\theta\cdot\cos\theta\right|}_{\nexists}$$

Beraz, f ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

c) $y-2x=3$ zuzenaren norabide bektorea $\vec{u}=(1,2)$. Eta, unitario bihurtuz, $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. f diferentziagarria ez denez $(0,0)$ puntuan, deribatu direkzionala kalkulatzeko definizioa erabili beharko dugu. Beraz, $\forall\vec{u}=(h_1,h_2)$ unitario:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{\lambda^3\cdot\left(h_1^3+h_2^3\right)}{\lambda^2\cdot\left(h_1^2+h_2^2\right)}}{\lambda}=h_1^3+h_2^3$$

Eta $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ kasurako:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=h_1^3+h_2^3=\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{8}{5\sqrt{5}}=\frac{9}{5\sqrt{5}}$$

(*) Polarretan adieraziz:

a) atalean $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

b) atalean $\begin{cases}h=\rho\cdot\cos\theta\\ k=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

6.- $f(x,y) = \mathrm{L}\left(x^2+3y^2\right)$ **funtzioa eta** $P(1,1)$ **puntua emanik:**

a) Aurkitu, *P* puntuan, norabideak non *f* funtzioaren aldakuntzarik handiena eta txikiena ematen diren.
b) Aurkitu *P* puntuari dagokion maila-kurba. Baita maila-kurbari dagokion *P* puntuko zuzen ukitzailea ere.
c) Marraztu aurreko atalean lortutako maila-kurba, eta, lehenengo ataleko norabideak.

(1.25 puntu)

a) Kontuan hartuta *f* funtzio diferentziagarria dela *P* puntuan, norabideak non *f* abiadurarik handienarekin eta txikienarekin aldatuko den, hurrenez hurren, *f*-ren gradientearena eta honekiko perpendikularra dena izango dira. Hau da:

Norabidea non *f* arinen aldatuko den:

$$f(x,y) = \mathrm{L}\left(x^2+3y^2\right) \;\Rightarrow\; \begin{cases} f'_x = \dfrac{2x}{x^2+3y^2} \;\Rightarrow\; f'_x(P) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ f'_y = \dfrac{6y}{x^2+3y^2} \;\Rightarrow\; f'_y(P) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\nabla f}(P) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$$

Eta norabidea non *f* geldiren aldatuko den:

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{\nabla f}(P) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \;\Rightarrow\; \vec{u} = (-3,1)$$

b) *P* puntuari dagokion maila-kurba:

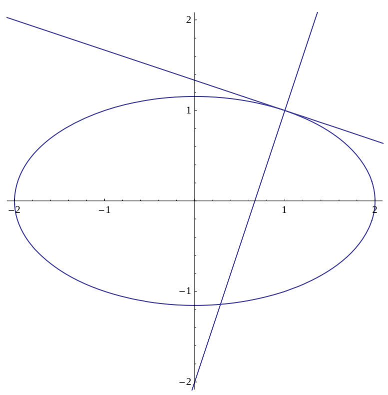
$$f(x,y) = \mathrm{L}\left(x^2+3y^2\right) = f(P) = \mathrm{L}\left(4\right) \;\Leftrightarrow\; x^2+3y^2 = 4 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4/3} = 1 \\ f(x,y) = \mathrm{L}\left(4\right) \end{cases}$$

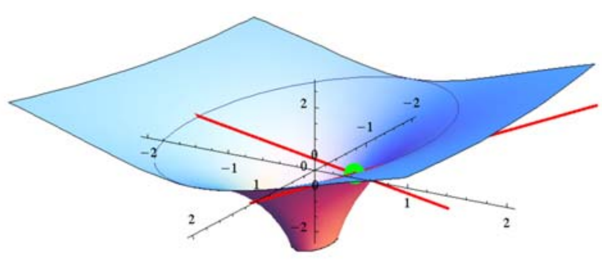
Beraz, elipsea da, zentroa (0,0) puntuan duena, eta erdi-erradioak 2 eta $2/\sqrt{3}$ direlarik.

P puntuko zuzen ukitzailea, berriz:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-3} = y-1 \\ f(x,y) = \mathrm{L}\left(4\right) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+3y = 4 \\ f(x,y) = \mathrm{L}\left(4\right) \end{cases}$$

c) Aurreko atalean lortutako maila-kurba, eta, lehenengo ataleko norabideak:





7.- Izan bedi $F(x,y,z)=xy+\frac{1}{z}-f\left(x\cdot z,\frac{y}{z}\right)-1$ **, non** $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ **funtzioa eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak diren, eta, (0,0) puntuan, *f* eta bere deribatu partzialak nuluak diren..**

a) **Estudiatu ea** $F(x,y,z)=0$ **ekuazioak** $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitua definitzen duen** $P(x,y,z)=(0,0,1)$ **puntuaren ingurunean.**

b) **Kalkulatu** $z'_x(0,0)$ **eta** $z'_y(0,0)$ **.**

(1.5 puntu)

a) $u=xz$ eta $v=\frac{y}{z}$ aldagaiak definituko ditugu. Eta $F(x,y,z)=xy+\frac{1}{z}-f\left(u,v\right)-1=0$ ekuazioak funtzio inplizituaren teorema betetzen ote duen aztertuko dugu:

i. $F(P)=0$

ii. $\exists\begin{cases} F'_x=y-z\cdot f'_u \\ F'_y=x-\frac{1}{z}\cdot f'_v \\ F'_z=-\frac{1}{z^2}-x\cdot f'_u+\frac{y}{z^2}\cdot f'_v \end{cases}$ eta jarraituak dira $P(0,0,1)$ puntuaren ingurunean.

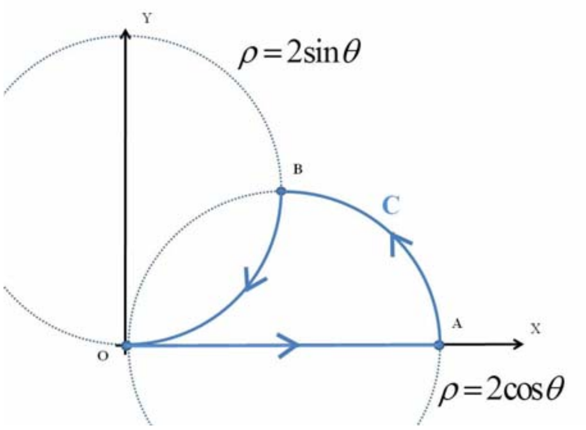
iii. $F'_z(P)=-1\neq 0$

Beraz, $P(0,0,1)$ puntuaren ingurunean, $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria, non $z(0,0)=1$

b) $z'_x(0,0)=-\frac{F'_x(P)}{F'_z(P)}=-\frac{0}{-1}=0$ eta $z'_y(0,0)=-\frac{F'_y(P)}{F'_z(P)}=-\frac{0}{-1}=0$

8.- Kalkulatu $\vec{F}(x,y)=(3y+e^{\cos x}+e^{y})\cdot\vec{i}+x(5+e^{y})\cdot\vec{j}$ eremu bektorialaren zirkulazioa OABO bide itxian zehar, O(0,0) puntutik A(2,0) puntura OX ardatzetik doana, Atik B(1,1) puntura $(x-1)^2+y^2=1$ zirkunferentzian zehar, erloju-orratzen kontrako noranzkoan, eta Btik Ora $x^2+(y-1)^2=1$ zirkunferentzian zehar, erloju-orratzen noranzkoa jarraituz.

(1.25 puntu)



$\vec{F}(x,y)=X\cdot\vec{i}+Y\cdot\vec{j}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan (eremu sinpleki konexua), baina $X'_y=3+e^{y}\neq Y'_x=5+e^{y}$. Beraz, $\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$ ez da bidearekiko independentea, hots, $\vec{F}$ ez da kontserbakorra.

Hala ere, Green-en teoremaren baldintzak egiaztatzen dira, beraz:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{R_{xy}}\left(Y'_x-X'_y\right)dxdy=2\iint_{R_{xy}}dxdy\overset{(*)}{=}2\int_0^{\pi/4}\int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta}\rho\,d\rho\,d\theta=4\int_0^{\pi/4}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)d\theta=$$

$$=4\int_0^{\pi/4}\cos(2\theta)\,d\theta=2\sin(2\theta)\Big|_0^{\pi/4}=2$$

(*) Polarretan: $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}\quad |J|=\rho\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1 & \Leftrightarrow & \rho=2\cos\theta\\ x^2+(y-1)^2=1 & \Leftrightarrow & \rho=2\sin\theta\end{cases}\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad R_{xy}\equiv\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ x^2+(y-1)^2\ge 1\\ y\ge 0\end{cases}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ 2\sin\theta\le\rho\le\cos\theta\end{cases}$$

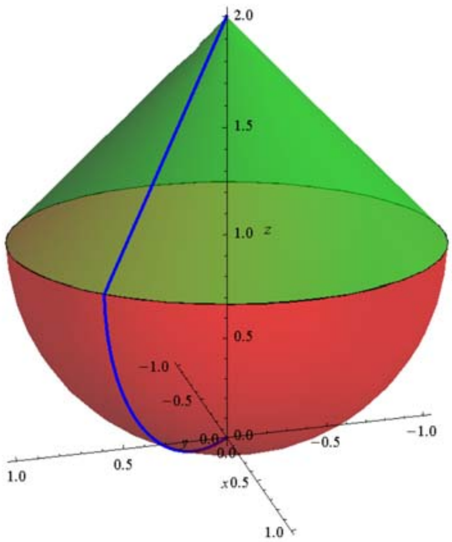
9.- a) Kalkulatu, integral anizkoitzaren bitartez, hurrengo bi gainazalek mugaturiko *V* solidoaren bolumena:

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+(z-1)^2=1 & \text{non } z\le 1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2=(z-2)^2 & \text{non } 1\le z\le 2 \end{cases}$$

b) Kalkulatu solidoaren muga osatzen duen S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

c) Izan bedi *S* gainazala *V* solidoaren muga. Izan bedi lehenengo oktantean definituriko $y=x$ planoaren eta *S* gainazalaren arteko *C* ebakidura kurba. Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z)=y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ eremu bektorialaren lerro-integrala *C* kurba zehar.

(2 puntu)



a) $S_1 \cap S_2 \quad \Leftrightarrow \quad (z-2)^2+(z-1)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2-3z+2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=1 \\ z=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+(z-1)^2=1, \quad z<1 \quad \Rightarrow \quad S_1 \equiv z=1-\sqrt{1-x^2-y^2} \\ S_2 \equiv x^2+y^2=(z-2)^2, \quad 1<z<2 \quad \Rightarrow \quad S_2 \equiv z=2-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$$

Koordenatu zilindrikoetan:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 \equiv z=1-\sqrt{1-\rho^2} \\ S_2 \equiv z=2-\rho \end{cases} \quad R_{xy} \equiv R_{\theta\rho} \equiv \rho\le 1 \quad \Rightarrow$$

$$BOL(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=2\pi\int_0^1\rho\left(2-\rho-1+\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho\ =$$

$$=2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}-\frac{\left(1-\rho^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^1=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\pi$$

b) $Azalera\left(S_2\right)\overset{(*)}{=}\iint_{R_{xy}}\left|\vec{N}\right|dxdy=\sqrt{2}\iint_{R_{xy}}dxdy=\pi\,Área\left(R_{xy}\right)=\pi\sqrt{2}$

(*) $\vec{N}\perp S_2\equiv z=2-\sqrt{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad\vec{N}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)\quad\Rightarrow\quad\left|\vec{N}\right|=\sqrt{2}$

c) $C=C_1\bigcup C_2$ non $C_1\equiv\begin{cases}S_1\equiv z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}\\ y=x\end{cases}$ eta $C_2\equiv\begin{cases}S_2\equiv z=2-\sqrt{x^2+y^2}\\ y=x\end{cases}\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C(ydx+xdy+zdz)=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^0 2xdx+\int_0^2 zdz=2$$

Edo:

$C'=C_1\bigcup C_2\bigcup C_3$ kurba itxia definituz, non $C_3\equiv\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\quad 0\le z\le 2\quad\Rightarrow$

$$\int_{C'}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}\overset{\text{(STOKES)}}{=}\iint_S\underbrace{\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)}_{=\vec{0}}\cdot d\vec{S}=0\quad\Leftrightarrow\quad\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=$$

$$=-\int_2^0 zdz=2$$