Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	Ariketa 10	Guztira

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

OHARRA: Azterketako garapen eta emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

1.- Kalkulatu $a_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\cdot \mathrm{L}\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ **gai orokorra duen segidaren limitea.**

(Puntu 1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\cdot \mathrm{L}\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{n^2-1}\cdot\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+1}-1\right)}{\dfrac{1}{n^3}\cdot\cos(0)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{n^2}\cdot\left(\dfrac{3n^2-1-3n^2-1}{3n^2+1}\right)}{\dfrac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{-2}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^3}} = \frac{-2}{3}$$

2.- Aztertu, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n}-\frac{1}{n(n+4)}\right)$ seriearen izaera.

(Puntu 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n}-\frac{1}{n(n+4)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)\quad \text{non}\quad \begin{cases} a_n=\dfrac{n+1}{3^n}\geq 0 & \forall n\in\mathbb{N} \\ b_n=\dfrac{1}{n(n+4)}\geq 0 & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ seriearen izaera aztertzeko D´Alembert-en irizpidea erabiliko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n+1}=\frac{1}{3}<1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ konbergentea da.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ seriearen izaera aztertzeko konparaziozko irizpidea erabiliko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} b_n=\dfrac{1}{n(n+4)}\sim\dfrac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ konbergentea da}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n \quad \text{konbergentea da.}$$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n}-\frac{1}{n(n+4)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ere konbergentea da.

3.- Izan bitez $a_n = n^{1/n}$ **eta** $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **gai orokorrak.**

a) **Estudiatu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **eta** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **serieen izaera.**

b) **Kalkulatu** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ **.**

(1.25 puntu)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen izaera aztertzeko konbergentzi baldintza beharrezkoa aplikatuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \overset{\text{(Z-E)}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1 \neq 0 \\ \text{Eta } \ a_n = n^{1/n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seriearen izaera aztertzeko konbergentzi baldintza beharrezkoa aplikatuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \\ \text{Eta } \ b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ dibergentea da.}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} \overset{(a \text{ atala})}{=} \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{(STOLZ)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

<u>Oharra</u>: Stolz irizpidearen baldintzak egiaztatzen dira:

$$\lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \infty \quad \Rightarrow \quad \{b_1 + b_2 + \ldots + b_n\} \text{ dibergentea da}$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \{b_1 + b_2 + \ldots + b_n\} \text{ hertsiki gorakorra da}$$

4.- Aurkitu $f(x)=\arctan\left(x^2\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

(1.5 puntu)

$$f(x)=\arctan\left(x^2\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}2x\cdot\left(-x^4\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot(-1)^n\cdot x^{4n+1} \quad \forall\in(-1,1)$$

(*) f' serie geometrikoaren batura da, arrazoia $r=-x^4$ delarik. Beraz, konbergentea da $\Leftrightarrow \quad |r|=\left|-x^4\right|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |x|<1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-1,1)$

Eta integragarria da $[0,x]$ tartean, $\forall x\in(-1,1)$:

$$f(x)-\underbrace{f(0)}_{=0}=\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+2}}{4n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad \forall\in(-1,1)$$

Baldin $x=\pm1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\exists f \text{ eta jarraitua da} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ konbergentea da (Leibniz)} \quad \Rightarrow \quad \exists S \text{ eta jarraitua da}\end{cases}$

Beraz, $f(x)=\arctan\left(x^2\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+2}}{2n+1} \quad \forall\in[-1,1]$

5.- Jakinda $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{y^3}{x^2+y^2}} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa ez dela diferentziagarria** $(0,0)$ **puntuan:**

- **a) Aztertu bere jarraitutasuna** $(0,0)$ **puntuan.**
- **b) Kalkulatu bere deribatu partzialak** $(0,0)$ **puntuan.**
- **c) Kalkulatu** $(0,0)$ **puntuan bere deribatu direkzionala** OX^+ **ardatzarekin 45º angelua osatzen duen norabidean.**

(1.75 puntu)

a) *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{y^3}{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi]}} e^{\frac{\rho^3\cdot\cos^3\theta}{\rho^2}}\ \lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi]}} e^{\rho\cdot\cos^3\theta}=e^0=1=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{\frac{0}{h^2}}-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{e^{\frac{k^3}{k^2}}-1}{k}=\lim_{k\to0}\frac{e^k-1}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\mathrm{L}\left(e^k\right)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{k\cdot\mathrm{L}(e)}{k}=1$$

c) *f* diferentziagarria ez denez $(0,0)$ puntuan, bere deribatu direkzionala $\vec{u}=\left(h_1,h_2\right)$ bektore unitarioak adierazitako norabidean definizioz kalkulatu behar da:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to0}\frac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{e^{\frac{(\lambda h_2)^3}{\lambda^2}}-1}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{e^{\lambda(h_2)^3}-1}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda\left(h_2\right)^3\cdot\mathrm{L}(e)}{\lambda}=\left(h_2\right)^3$$

Beraz, OX^+ ardatzarekin 45º angelua osatzen duen norabidea $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bektore unitarioak adierazten duenez,

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

6.- Kalkulatu hurrengo integralak:

a) $\int_0^2 \frac{3}{(x-1)^2}dx$

b) $\int_0^\infty (x-1)^2 dx$

(0.75 puntu)

a) $I = \int_0^2 \frac{3}{(x-1)^2}dx = \int_0^2 f(x)dx$ non $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,2]-\{1\}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=1$ puntu singular bakarra da.

$$I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = I_1 + I_2$$

Eta I konbergentea da $\quad \Leftrightarrow \quad I_1$ eta I_2 konbergenteak dira

$I_1 = \int_0^1 \frac{3}{(x-1)^2}dx = \lim_{\mu\to 1^-} \int_0^\mu \frac{3}{(x-1)^2}dx = \lim_{\mu\to 1^-} \frac{-3}{x-1} - \frac{-3}{0-1} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1$ dibergentea da.

Beraz, I ere dibergentea da, eta $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,2]-\{1\} \quad \Rightarrow \quad I = \infty$

b) $I = \int_0^\infty (x-1)^2 dx = \int_0^\infty f(x)dx$ non $f(x) = (x-1)^2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,\infty)$

Beraz, ∞ puntu singular bakarra da.

$I = \int_0^\infty (x-1)^2 dx = \lim_{\mu\to\infty} \int_0^\mu (x-1)^2 dx = \lim_{\mu\to\infty} \frac{(x-1)^3}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad I$ dibegentea da.

7.- $w(x,y)=g\left(y^2\right)-f\left(y^2+g(xy)\right)$ **funtzioa emanik,** f **eta** g **diferentziagarriak** $\mathbb{R}^2$ **osoan, eta** $g(2)=1$, $g'(1)=1$, $g'(2)=2$, $f'(1)=2$, $f'(2)=1$ **ezagutuz, kalkulatu** $\left(w'_x\left(2,1\right)\right)^2+w'_y\left(2,1\right)$

(1.5 puntu)

$$w'_x(x,y)=-y\cdot g'(xy)\cdot f'\left(y^2+g(xy)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w'_x(2,1)=-g'(2)\cdot f'\left(1+g(2)\right)=-g'(2)\cdot f'\left(2\right)=-2$$

$$w'_y(x,y)=2y\cdot g'\left(y^2\right)-\left(2y+x\cdot g'(xy)\right)\cdot f'\left(y^2+g(xy)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w'_y(2,1)=2\cdot g'(1)-\left(2+2\cdot g'(2)\right)\cdot f'\left(1+g(2)\right)=2-(2+2\cdot 2)=-4$$

Orduan:

$$\left(w'_x\left(2,1\right)\right)^2+w'_y\left(2,1\right)=(-2)^2-4=0$$

8.- Izan bedi $x^2 + \sin z + \int_0^y \sin\left(t^3 + t\right) dt = 0$ **ekuazioa.**

a) Egiaztatu ekuazio horrek *x* eta *y* aldagaiko *z* funtzio inplizitua ($z = z(x,y)$ **) definitzen duela *P*(0,0,0) puntuaren ingurune batean.**

b) Aztertu ea $z = z(x,y)$ **funtzioak puntu kritikoa duen *P* puntuan, eta, baiezko kasuan, sailkatu**

(2 puntu)

a) Froga dezagun $F(x,y,z) = x^2 + \sin z + \int_0^y \sin\left(t^3 + t\right) dt = 0$ ekuazioak $z = z(x,y)$ funtzio diferentziagarria definitzen duela $P(0,0,0)$ puntuaren ingurune batean:

i. $F(P) = 0$

ii. $\exists \begin{cases} F'_x = 2x \\ F'_y = \sin\left(y^3 + y\right) \\ F'_z = \cos z \end{cases}$ eta jarraituak dira $P(0,0,0)$ puntuaren ingurune batean

iii. $F'_z(P) = \cos 0 = 1 \neq 0$

Beraz, $P(0,0,0)$ puntuaren ingurune batean $\exists! z = z(x,y)$ diferentziagarria, non $z(0,0) = 0$

b) Azter dezagun $z = z(x,y)$ funtzioak puntu kritikoa duen *P* puntuan.

$F(x,y,z(x,y)) = 0$ ekuazioan *x*-rekiko deribatuz:

(1) $\quad 2x + \cos z \cdot z'_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_x = -\dfrac{2x}{\cos z} \quad \Rightarrow \quad z'_x(0,0) = 0$

$F(x,y,z(x,y)) = 0$ ekuazioan *y*-rekiko deribatuz:

(2) $\quad \sin\left(y^3 + y\right) + \cos z \cdot z'_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_y = -\dfrac{\sin\left(y^3 + y\right)}{\cos z} \quad \Rightarrow \quad z'_y(0,0) = 0$

Beraz, puntu kritikoa dago *P* puntuan. Orain sailkatuko dugu.

(1) ekuazioan *x*-rekiko deribatuz:

$$2 - \sin z \cdot \left(z'_x\right)^2 + \cos z \cdot z''_{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''_{x^2} = \frac{\sin z \cdot \left(z'_x\right)^2 - 2}{\cos z} \quad \Rightarrow \quad z''_{x^2}(0,0) = -2$$

(1) ekuazioan *y*-rekiko deribatuz:

$$-\sin z \cdot z'_y \cdot z'_x + \cos z \cdot z''_{xy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''_{xy} = \frac{\sin z \cdot z'_y \cdot z'_x}{\cos z} \quad \Rightarrow \quad z''_{xy}(0,0) = 0$$

(2) ekuazioan *y*-rekiko deribatuz:

$$\left(3y^2 + 1\right) \cdot \cos\left(y^3 + y\right) - \sin z \cdot \left(z'_y\right)^2 + \cos z \cdot z''_{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z''_{y^2} = \frac{\sin z \cdot \left(z'_y\right)^2 - \left(3y^2+1\right)\cdot \cos\left(y^3+y\right)}{\cos z} \quad \Rightarrow \quad z''_{y^2}(0,0) = -1$$

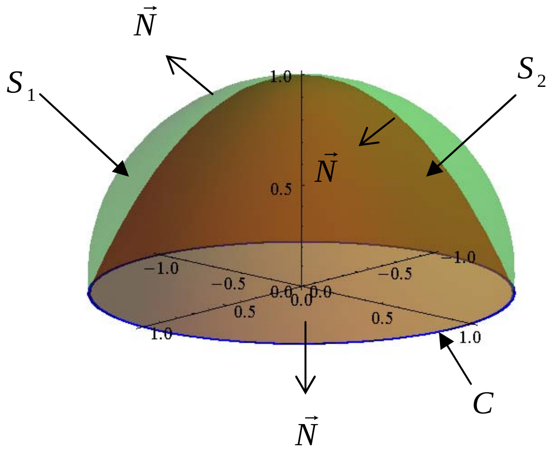
Beraz, $d^2 z(0,0) = -2\left(dx\right)^2 - \left(dy\right)^2 < 0 \quad \forall \left(dx, dy\right) \neq (0,0) \quad \Rightarrow \quad P$ puntuan maximo erlatiboa dago.

<u>Oharra</u>: Puntu kritikoaren sailkapena Sylvester-en irizpidea erabiliz ere egin daiteke.

$$Hf\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_1 = 2 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P \text{ puntuan maximo erlatiboa dago.}$$

9.- Izan bedi $S_1 \equiv z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ eta $S_2 \equiv z = 1-x^2-y^2$ gainazalek osaturiko S gainazal itxia. Kalkulatu S_1 eta S_2 gainazal bakoitzetik irteten den $\vec{F}(x,y,z) = \left(y^3,\ x^3z^2, 1\right)$ bektorearen fluxua.

(1.5 puntu)



(S_3 -ri dagokiona)

$$S_1 \cap S_2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^3,\ x^3z^2, 1\right)$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira, eta $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxia da, beraz:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \overset{\text{GAUSS}}{=} \iiint_V \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0$$

Eta, aldi berean: $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$

Beraz, $\iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S}$

Izan bitez $S_3 \equiv z = 0 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 1$, eta $S' \equiv S_3 \cup S_1$ gainazal itxia. Honela, aurreko kasuan azaldu dugun bezala:

$$\iint_{S'} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Eta kalkula dezagun azken integral hau:

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right) dxdy \overset{(*)}{=} -\iint_{R_{xy}} dxdy = -\text{Azalera}\left(R_{xy}\right) = -\pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pi \\ \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\pi \end{cases}$$

(*) $\quad \vec{N} = (0,0,1)$ eta $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$

<u>Beste modu batean</u>: eskatutako fluxu biak definizioz kalkulatuz.

$S_1 \equiv z = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$ gainazaletik irteten den fluxua, non

$\vec{N} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$ eta $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$

Beraz, $\iint\limits_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint\limits_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N} \right) dxdy = \iint\limits_{R_{xy}} \left(\dfrac{xy^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \dfrac{yx^3\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 \right) dxdy =$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \left(\frac{\rho^4 \cdot \cos\theta \cdot \sin^3\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\rho^4 \cdot \sin\theta \cdot \cos^3\theta\left(1-\rho^2\right)}{\sqrt{1-\rho^2}} + 1 \right) d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\rho^5 \cdot \cos\theta \cdot \sin^3\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} + \rho^5 \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \sin\theta \cdot \cos^3\theta + \rho \right) d\rho \, d\theta$$

Puntu honetara helduta, argi dago lortutako integrala konplikatuegia dela bere ebazpenarekin jarraitzeko.

$S_2 \equiv z = 1-x^2-y^2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$ gainazaletik irteten den fluxua, non

$\vec{N} = \left(2x, 2y, 1\right)$ eta $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$

Beraz, $\iint\limits_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint\limits_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N} \right) dxdy = -\iint\limits_{R_{xy}} \left(2xy^3 + 2yx^3(1-x^2-y)^2 + 1 \right) dxdy =$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \left(2\rho^4 \cdot \cos\theta \cdot \sin^3\theta + 2\rho^4 \cdot \sin\theta \cdot \cos^3\theta \left(1-\rho^2\right)^2 + 1 \right) d\rho \, d\theta$$

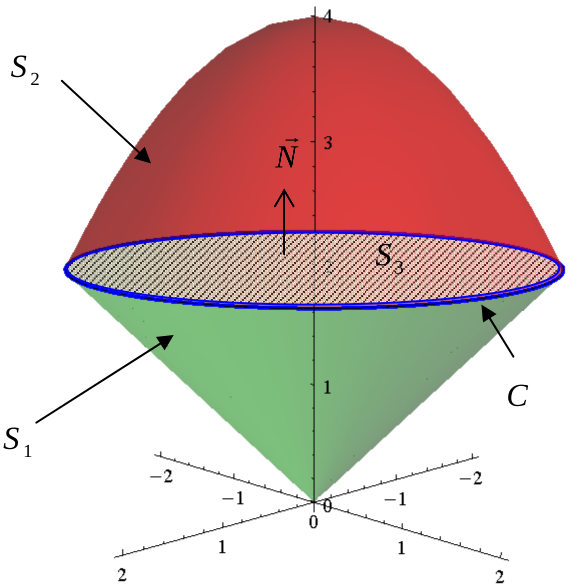
Aurreko kasuan lortutako bezain konplikatua ez bada ere, argi dago integral hau ebaztea lehenengo metodoan ebatzi behar izan duguna baino luzeagoa dela.

10.- Izan bedi $S_1 \equiv z = \sqrt{x^2+y^2}$ eta $S_2 \equiv 8-2z = x^2+y^2$ gainazalek osaturiko *S* gainazal itxiak mugatzen duen *V* solidoa.

- **a) Kalkulatu *V* solidoaren bolumena.**
- **b) Kalkulatu *S* osatzen duen S_1 gainazalaren zatiaren azalera.**
- **c) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = yz^2 \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ eremu bektorialaren zirkulazioa S_1 eta S_2 gainazalen arteko *C* ebakidura-kurban zehar.**

(2.75 puntu)

a)



$$S_1 \cap S_2 \iff z^2 = 8-2z \iff$$

$$\iff z^2+2z-8=0 \iff \begin{cases} z=2 \\ z=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=2 \end{cases}$$

Bolumena zilindrikoetan:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta & |J| = \rho \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2 \\ \rho \le z \le \dfrac{8-\rho^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Bolumena}(V) = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho}^{\frac{8-\rho^2}{2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\left(\frac{8-\rho^2}{2} - \rho\right) d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4\rho - \frac{\rho^3}{2} - \rho^2\right) d\rho\, d\theta = 2\pi\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{8} - \frac{\rho^3}{3}\right)_0^2 = 2\pi\left(8-2-\frac{8}{3}\right) = \frac{20\pi}{3}$$

$$\text{b) Azalera}(S_1) = \iint_{S_1} dS = \iint_{R_{xy}} |\vec{N}|\, dxdy \overset{(*)}{=} \iint_{R_{xy}} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \cdot \text{Azalera}(R_{xy}) = 4\pi\sqrt{2}$$

(*) $S_1 \equiv z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 4 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{N} = (-z'_x, -z'_1, 1) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}_1, 1\right) \Rightarrow |\vec{N}| = \sqrt{2}$$

c) Kontuan hartuta $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direla eta *C* kurba itxi eta sinplea, orduan Stokes-en teorema erabili daiteke:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{STOKES}}{=} \iint_{s_3} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy$$

non $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\left(0,2yz-1,-z^2\right)$

eta $S_3 \equiv z=2 \quad \forall(x,y)\in R_{xy}\equiv x^2+y^2\leq 4 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}=(0,0,1)$ eta $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

Beraz, $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}=-z^2=-4$.

Eta, orduan:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \pm\iint_{R_{xy}} -4dxdy = -4\cdot\text{Azalera}\left(R_{xy}\right)=-16\pi$$

<u>Beste modu batean</u>: Stokes erabili beharrean, lerro-integrala ebatziz.

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C\left(yz^2dx-ydy+xdz\right)\overset{(*)}{=}\int_0^{2\pi}\left(-16\sin^2 t-4\sin t\cos t\right)dt=$$

$$(*)\quad C\equiv\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}\equiv\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t \quad 0\leq t\leq 2\pi\\ z=2\end{cases}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(8\cos(2t)-8-4\sin t\cos t\right)dt=\left(4\sin(2t)-8t-2\sin^2 t\right)_0^{2\pi}=-16\pi$$