Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	1. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+n\right)^{1/n} \quad \forall a>0$

(2 puntu)

$$\forall a>0 \quad \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \forall a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & \forall a<1 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(a^n+n\right)^{1/n} = \begin{cases} (\infty+\infty)^0 = \infty^0 & \forall a>1 \\ (1+\infty)^0 = \infty^0 & a=1 \\ (0+\infty)^0 = \infty^0 & \forall a<1 \end{cases}$$

Eta indeterminazioa bi modutan ebatz daiteke:

1. $$\forall a>0 \quad \lim_{n\to\infty}\left(a^n+n\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+n} \overset{(Z-E)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+n}{a^{n-1}+n-1} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+n}{a^{n-1}+n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall a>1 \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+n}{a^{n-1}+n} \overset{(a^n\gg n)}{\sim} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^{n-1}} = a \\ \forall a\le 1 \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+n}{a^{n-1}+n} \overset{(a^n\ll n)}{\sim} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n} = 1 \end{cases}$$

2. $$\forall a>0 \quad A = \lim_{n\to\infty}\left(a^n+n\right)^{1/n} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{L}\left(a^n+n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall a>1 \quad \mathrm{L}A \overset{(a^n\gg n)}{\sim} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\mathrm{L}\left(a^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\mathrm{L}(a)}{n} = \mathrm{L}(a) \quad \Leftrightarrow \quad A=a \\ \forall a\le 1 \quad \mathrm{L}A \overset{(a^n\ll n)}{\sim} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\mathrm{L}(n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A=1 \end{cases}$$

Beraz, $\forall a>0 \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+n\right)^{1/n} = \begin{cases} a & \forall a>1 \\ 1 & \forall a\le 1 \end{cases}$

2.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n}{3^{2n}}+n^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right)$ **seriearen izaera.**

(2 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n}{3^{2n}}+n^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n=\frac{5^n}{3^{2n}}=\left(\frac{5}{9}\right)^n\geq 0 \\ b_n=n^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\geq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

- $a_n=\left(\frac{5}{9}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serie geometrikoa da, $r=\frac{5}{9}<1$ arrazoikoa, beraz, konbergentea da.
- $b_n=n^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\sim n^3\cdot\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^2\sim\frac{n^3}{n^4}=\frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ dibergentea da.

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n}{3^{2n}}+n^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right)$ dibergentea da.

3.- $1-\frac{2x}{3}+\frac{3x^2}{9}-\frac{4x^3}{27}+\dots$ **berretura-seriea emanik, adierazi x-ren hurrengo balioetatik, zeinetarako existitzen den batura finitua, eta kalkulatu kasu horietan:**

$$x=e\,,\quad x=\pi\,,\quad x=-1\,,\quad x=3$$

(2 puntu)

$$1-\frac{2x}{3}+\frac{3x^2}{9}-\frac{4x^3}{27}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)}{3^n}\cdot x^n$$

Konbergentzi arloa kalkulatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)}{3^{n+1}}\cdot|x|^{n+1}}{\frac{(n+1)}{3^n}\cdot|x|^n}=\frac{|x|}{3}<1\quad\Leftrightarrow\quad|x|<3\quad\Leftrightarrow\quad x\in(-3,3)$$

Baldin $x=3\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)$ ez da konbergentea.

Baldin $x=-3\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$ dibergentea da.

Beraz, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)}{3^n}\cdot x^n$ konbergentea da $\forall x\in(-3,3)$

Hau da, $\forall x\in(-3,3)\quad\exists S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)}{3^n}\cdot x^n$ finitua.

Beraz, emandako puntuetatik:

$$\left.\begin{array}{l}x=e\in(-3,3)\\ x=-1\in(-3,3)\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\exists S(x)\in\mathbb{R}\qquad\text{eta}\qquad\left.\begin{array}{l}x=\pi\notin(-3,3)\\ x=3\notin(-3,3)\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\nexists S(x)\in\mathbb{R}$$

Orain, batura kalkulatzeko, konbergentzi arloan integragarria denez:

$$\forall x\in(-3,3)\quad\exists\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)}{3^n}\cdot t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}x\cdot\left(-\frac{x}{3}\right)^n\overset{(*)}{=}$$

$$=\frac{x}{1+\frac{x}{3}}=\frac{3x}{3+x}\qquad\forall x\in(-3,3)$$

Eta deribatuz:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)}{3^n}\cdot x^n=\frac{3(3+x)-3x}{(3+x)^2}=\frac{9}{(3+x)^2}\qquad\forall x\in(-3,3)$$

Beraz, $S(e)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)}{3^n}\cdot e^n=\frac{9}{(3+e)^2}$ eta $S(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{3^n}=\frac{9}{4}$

(*) $r=-\frac{x}{3}$ arrazoiko serie geometrikoa

4.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{\mathrm{L}\left(x^2-3\right)}{9-\left(x^2+y^2\right)}}$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2-3>0\,,\,9-\left(x^2+y^2\right)\neq 0\,,\,\frac{\mathrm{L}\left(x^2-3\right)}{9-\left(x^2+y^2\right)}\geq 0\right\}$$

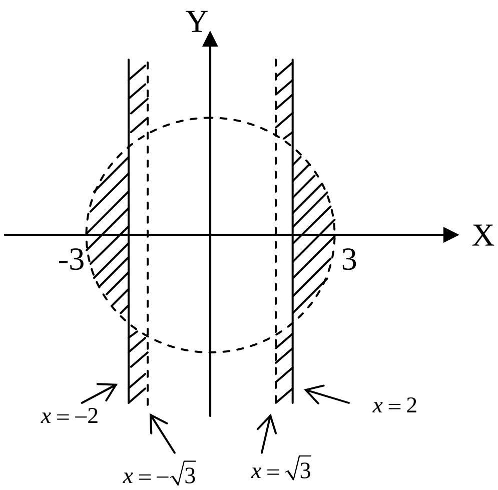
- $x^2-3>0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2>3 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$
- $9-\left(x^2+y^2\right)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2\neq 9$
- $\dfrac{\mathrm{L}\left(x^2-3\right)}{9-\left(x^2+y^2\right)}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\mathrm{L}\left(x^2-3\right)\geq 0 \;\wedge\; 9-\left(x^2+y^2\right)>0\\ \mathrm{L}\left(x^2-3\right)\leq 0 \;\wedge\; 9-\left(x^2+y^2\right)<0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2-3\geq 1 \;\wedge\; x^2+y^2<9\\ x^2-3\leq 1 \;\wedge\; x^2+y^2>9\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2\geq 4 \;\wedge\; x^2+y^2<9\\ x^2\leq 4 \;\wedge\; x^2+y^2>9\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x\in\left(-\infty,-2\right]\cup\left[2,\infty\right) \;\wedge\; x^2+y^2<9\\ x\in\left[-2,2\right] \;\wedge\; x^2+y^2>9\end{cases}$$

Beraz, baldintza guztiak kontuan hartuta:

$$D=D_1\cup D_2 \text{ non } \begin{cases}D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\in\left(-3,-2\right]\cup\left[2,3\right) \;\wedge\; x^2+y^2<9\right\}\\ D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\in\left[-2,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},2\right] \wedge\; x^2+y^2>9\right\}\end{cases}$$



5.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\left(x^2\cdot y\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) **Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
b) **Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
c) **Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**
d) **Kalkulatu bere deribatu direkzionala (0,0) puntuan** $3x+5y=4$ **zuzenaren norabidean.**

(3 puntu)

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2\cdot y\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}\overset{(\text{polarretan})}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{1-\cos\left(\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\right)}{\sin\left(\rho^2\right)}\sim$$

$$\sim\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\dfrac{\left(\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\right)^2}{2}}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho^4\cdot\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta}{2}=0=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{0}{\sin\left(h^2\right)}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\dfrac{0}{\sin\left(k^2\right)}-0}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) Baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{1-\cos\left(h^2\cdot k\right)}{\sin\left(h^2+k^2\right)}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$\overset{(\text{polarretan})}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\left|\dfrac{1-\cos\left(\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\right)}{\sin\left(\rho^2\right)}\right|}{\rho}\sim\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\left|\dfrac{\left(\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\right)^2}{2}\right|}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho^3\cdot\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta}{2}=0\quad\Leftrightarrow\quad f\ \text{diferentziagarria da (0,0) puntuan}$$

d) *f* diferentziagarria denez (0,0) puntuan $\quad\Rightarrow\quad f$ deribagarria da puntu horretan eta

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\overrightarrow{\nabla f}(0,0)\cdot\vec{u}\quad\forall\vec{u}=\left(h_1,h_2\right)\ \text{unitario}$$

Kasu honetan $\overrightarrow{\nabla f}(0,0)=(0,0)\quad\Rightarrow\quad\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=0$

Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	2. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

6.- $F(x,y,z) = x + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{z^2} - \frac{11}{4} = 0$ **ekuazioa emanik:**

a) Kalkulatu $a \in \mathbb{R}$ parametroaren balioa, ekuazio horrek x eta y aldagaiko z funtzio inplizitua defini dezan ($z = z(x,y)$), $P(x,y,z) = (a,2,2)$ puntuaren ingurune batean.

b) Aurkitu $z = z(x,y)$ funtzioaren gradientea $(a,2)$ puntuan.

(2 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko diegu emandako ekuazioari eta puntuari:

i. $F(P) = a + 2 - \frac{1}{4} - \frac{11}{4} = a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$

ii. $F'_x = 1 \quad F'_y = y \quad F'_z = \frac{2}{z^3}$ existitzen eta jarraituak dira $P(x,y,z) = (a,2,2)$ puntuaren ingurune batean non $z \neq 0$.

iii. $F'_z(P) = \frac{1}{4} \neq 0$

Beraz, $P(x,y,z) = (a,2,2)$ puntuaren ingurune batean $\exists! z = z(x,y)$ funtzio diferentziagarria non $z(a,2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$. Hau da, $P(x,y,z) = (1,2,2)$.

b) $\overrightarrow{\nabla} z(1,2) = z'_x(1,2) \cdot \vec{i} + z'_y(1,2) \cdot \vec{j}$

$F(x,y,z(x,y)) = 0$ ekuazioan x-rekiko deribatuz:

$$1 + \frac{2}{z^3} \cdot z'_x = 0 \quad \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \quad 1 + \frac{1}{4} \cdot z'_x(1,2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_x(1,2) = -4$$

$F(x,y,z(x,y)) = 0$ ekuazioan y-rekiko deribatuz:

$$y + \frac{2}{z^3} \cdot z'_y = 0 \quad \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \quad 2 + \frac{1}{4} \cdot z'_y(1,2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_y(1,2) = -8$$

Beraz, $\overrightarrow{\nabla} z(1,2) = (-4,-8)$

7.- Aurkitu $C \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2} \right)^2 = 1 \end{cases}$ **kurba itxitik** $z = 0$ **planora dauden distantzia maximoa eta minimoa.**

(2 puntu)

Espazioko kurba batetik $z = 0$ planora dagoen distantzia $d(x, y, z) = |z|$ funtzioa ematen du, non (x, y, z) kurba horretako puntua den. Kasu honetan, C kurbako puntu guztietarako $z > 0$ denez, orduan $d(x, y, z) = z$.
Funtzio hau jarraitua da eta C kurba multzo itxi eta mugatua, beraz Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu maximo eta minimo absolutuak existitzen direla, eskatutako distantzia maximoa eta minimoa hain zuzen ere.
Bere kalkulurako, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x, y, z) = z + \lambda\left(x^2 + y^2 - z\right) + \mu\left(x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)$$

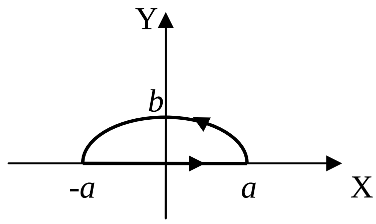
Funtzio honen puntu kritikoak:

$$\begin{cases} w'_x = 2\lambda x + 2\mu x = 2x(\lambda + \mu) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \Rightarrow z = \dfrac{9}{4} \\ -\dfrac{1}{2} \Rightarrow z = \dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \lambda = -\mu \overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda = 0 \quad \# \end{cases} \\ w'_y = 2\lambda y + 2\mu\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \quad (1) \\ w'_z = 1 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \\ x^2 + y^2 = z \\ x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Beraz, C kurbako $A = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ eta $B = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ puntuak lortu ditugu.

A puntutik $z = 0$ planora dagoen distantzia $d(A) = \frac{9}{4}$ maximoa da eta B puntutik $z = 0$ planora dagoen distantzia $d(B) = \frac{1}{4}$ minimoa da.

8.- $\vec{F}(x,y) = (\sin x + \arctan y)\cdot\vec{i} + \left(\arctan y - 2xy + \dfrac{x}{1+y^2}\right)\cdot\vec{j}$ **bektorea emanik, kalkulatu bere zirkulazioa irudian erakusten den *C* kurba itxian zehar,** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **eta** $y=0$ **zatiez osaturikoa hain zuzen ere.**



(2 puntu)

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira eta *C* kurba itxi eta zatika leuna da. Beraz, Green-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} \left(Y'_x - X'_y\right) dxdy$$

$$\text{non}\ \begin{cases} X = \sin x + \arctan y \quad \Rightarrow \quad X'_y = \dfrac{1}{1+y^2} \\ Y = \arctan y - 2xy + \dfrac{x}{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad Y'_x = -2y + \dfrac{1}{1+y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} -2y\,dxdy \overset{(*)}{=} -2\int_0^{\pi}\int_0^1 ab^2\rho^2\cdot\sin\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{2ab^2}{3}\cdot\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -\frac{4ab^2}{3}$$

(*) $R_{xy} \equiv \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Polarretan adierazita: $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J| = ab\rho \quad$ eta $\quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$

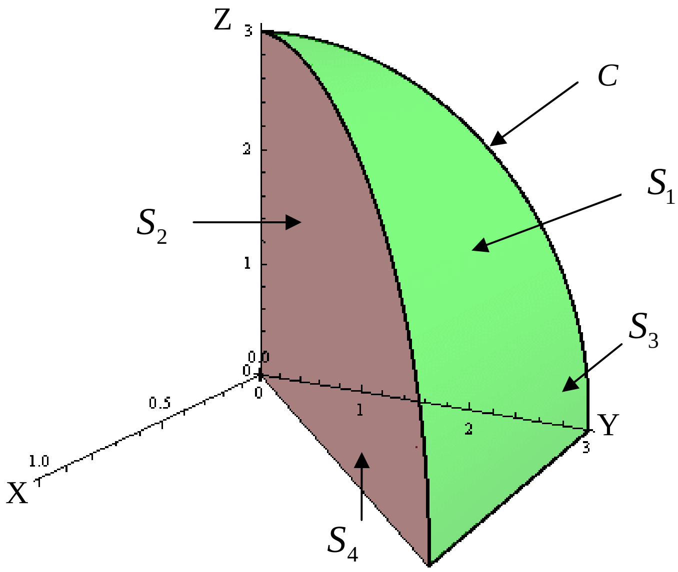
9.- Izan bedi lehenengo koadrantean *S* gainazal itxiak mugaturiko *V* solidoa (irudia ikusi), *S* gainazala $S_1 \equiv y^2+z^2=9$, $S_2 \equiv x=\dfrac{y}{3}$, $S_3 \equiv x=0$ eta $S_4 \equiv z=0$ gainazalek osatzen dutena hain zuzen ere. Har dezagun $\vec{F}(x,y,z)=y\cdot\vec{i}+2x\cdot\vec{j}+2z\cdot\vec{k}$ bektorea.

a) Kalkulatu *V*-ren bolumena.

b) Kalkulatu *S* gainazaletik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxu osoa.

c) Kalkulatu *S* gainazaleko aurpegi bakoitzetik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxua. (Iradokizuna: utzi azkenerako S_1-etik irteten den fluxuaren kalkulua).

d) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa *S* gainazaleko S_1 gainazalaren zatia mugatzen duen *C* kurba itxian zehar (irudian marra lodiagoaz marrazturikoa).



(3 puntu)

a) Bolumena bi erreferentzi sistemetan kalkula genezake.

Zilindrikoetan (YZ planoan proiektatuz):

$$\begin{cases} x=x \\ y=\rho\cos\theta \\ z=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J|=\rho \quad \text{eta} \quad V\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le 3 \\ 0\le x\le\dfrac{\rho\cos\theta}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Bolumena}(V)=\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^{\frac{\rho\cos\theta}{3}}\rho\,dx\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^3\frac{\rho^2\cos\theta}{3}\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\left.\frac{\rho^3\cos\theta}{9}\right|_0^3 d\theta=$$

$$=3\cdot\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}=3$$

Kartesiarretan (XY planoan proiektatuz):

$$\text{Bolumena}(V)=\int_0^3\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{9-y^2}}dz\,dx\,dy=\int_0^3\int_0^{y/3}\sqrt{9-y^2}\,dx\,dy=\int_0^3\frac{y\sqrt{9-y^2}}{3}dy=$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(9 - y^2\right)^{3/2}}{3/2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 3$$

b) $\Phi_S\left(\vec{F}\right) \overset{(S \text{ itxia} \Rightarrow \text{GAUSS})}{=} \iiint\limits_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = 2\iiint\limits_V dxdydz = 2 \cdot \text{Bolumena}\left(V\right) = 6$

c) $\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) + \Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right) + \Phi_{S_3}\left(\vec{F}\right) + \Phi_{S_4}\left(\vec{F}\right) = 6$

Hauetako bakoitza kalkulatuko dugu, S_1-etik irteten den fluxuaren kalkulua azkenerako utzita.

- $S_3 \equiv x = 0 \quad \forall (y,z) \in R_{yz} \equiv y^2 + z^2 \le 9$ aurpegitik irteten den fluxua:

$$\Phi_{S_3}\left(\vec{F}\right) = \iint\limits_{S_3}\left(ydydz + 2xdzdx + 2zdxdy\right) = \pm\iint\limits_{R_{yz}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dydz \overset{(1)}{=} -\iint\limits_{R_{yz}} ydydz =$$

$$\overset{(*)}{=} -\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \cdot \cos\theta \, d\rho \, d\theta = -\int_0^{\pi/2} 9\cos\theta d\theta = -9\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = -9$$

(1) $\vec{N} = \left(1,0,0\right)$ eta $\beta > \dfrac{\pi}{2}$

- $S_4 \equiv z = 0 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ 0 \le x \le \dfrac{y}{3} \end{cases}$ aurpegitik irteten den fluxua:

$$\Phi_{S_4}\left(\vec{F}\right) = \iint\limits_{S_4}\left(ydydz + 2xdzdx + 2zdxdy\right) = 0$$

- $S_2 \equiv x = \dfrac{y}{3} \quad \forall (y,z) \in R_{yz} \equiv y^2 + z^2 \le 9$

$$\Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right) = \iint\limits_{S_2}\left(ydydz + 2xdzdx + 2zdxdy\right) = \pm\iint\limits_{R_{yz}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dydz \overset{(2)}{=} \iint\limits_{R_{yz}}\left(y - \frac{2y}{9}\right)dydz =$$

$$= \iint\limits_{R_{yz}} \frac{7y}{9} dydz \overset{(*)}{=} \frac{7}{9}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \cdot \cos\theta \, d\rho d\theta = \frac{7}{9}\int_0^{\pi/2} 9\cos\theta d\theta = 7\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = 7$$

(2) $\vec{N}_1 = \left(1, -\dfrac{1}{3}, 0\right)$ eta $\beta < \dfrac{\pi}{2}$

(*) Polarretan adierazita: $\begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |J| = \rho \quad$ eta $\quad \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 3 \end{cases}$

- $S_1 \equiv y^2 + z^2 = 9$ aurpegitik irteten den fluxua, aurreko emaitzetatik ondorioztatuko dugu:

$$\Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) = \Phi_S\left(\vec{F}\right) - \Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right) - \Phi_{S_3}\left(\vec{F}\right) - \Phi_{S_4}\left(\vec{F}\right) = 6 - 7 + 9 = 8$$

d) $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira eta C kurba itxi eta zatika leuna da. Beraz, Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{S_1} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{R_{xy}} dxdy = Azalera\left(R_{xy}\right) = \frac{3}{2} \quad \textbf{(} R_{xy} \text{ triangelua da)}$$