Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

1.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\arctan\left(n^3\right)\cdot \mathrm{L}\left(5e^{2/n}-4\right)\cdot n}{\left(3n^2+\mathrm{L}n\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$

(0.75 puntu)

Baliokidetasunak erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(n^3\right)\cdot \mathrm{L}\left(5e^{2/n}-4\right)\cdot n}{\left(3n^2+\mathrm{L}n\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\pi}{2}\cdot\left(5e^{2/n}-4-1\right)\cdot n}{3n^2\cdot\dfrac{1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\pi}{2}\cdot 5\left(e^{2/n}-1\right)\cdot n}{3n^2\cdot\dfrac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{5\pi}{6}\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}\left(e^{2/n}\right)\cdot n = \frac{5\pi}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot n = \frac{5\pi}{3}$$

2.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n+1)\cdot \mathrm{L}n}{n^a} \quad \forall a\geq 0$

(0.75 puntu)

$\nexists \lim_{n\to\infty}\sin(n+1)$ baina $\sin(n+1)$ mugatuta dago ($-1\leq\sin(n+1)\leq 1$).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}n}{n^a} = \begin{cases} 0 & \forall a>0 \ \ (\mathrm{L}n \ll n^a) \\ \infty & a=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)\cdot\mathrm{L}n}{n^a} \begin{cases} =0 & \forall a>0 \\ \nexists & a=0 \end{cases}$$

3.- Adierazi, <u>arrazoituz</u>, ea hurrengo baieztapenak zuzenak diren, eta, ez izatekotan, <u>kontradibidea</u> jarri:

a) Edozein serie konbergente, absolutuki konbergentea da.

b) Edozein serie konbergente, segida konbergentetik sortzen da.

c) Baldin $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell\in\mathbb{R}$**, orduan** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konbergentea da.**

(0.75 puntu)

a) Ez da zuzena. Kontradibidea: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ konbergentea da, Leibniz betetzen baitu, baina ez da absolutuki konbergentea, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ dibergentea baita.

b) Zuzena da. Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea bada, orduan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (BB). Eta, honela, $\lim_{n\to\infty} a_n\in\mathbb{R} \iff \{a_n\}$ konbergentea.

c) Ez da zuzena. Kontradibidea: $a_n=\dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0\in\mathbb{R}$. Eta, hala ere, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ dibergentea da.

4.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n^a}$ seriearen izaera $x \in [0,\pi]$ eta $a \in \mathbb{R}$ parametroen balioen arabera.

(1.5 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ non } a_n = \frac{\cos^n x}{n^a} \begin{cases} \geq 0 & \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \gtrless 0 & \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |a_n| = \frac{|\cos^n x|}{n^a} = \frac{|\cos x|^n}{n^a}$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serieari D´Alambert aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\cos x|^{n+1}}{(n+1)^a}}{\frac{|\cos x|^n}{n^a}} = |\cos x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{(n+1)^a} = |\cos x| \begin{cases} <1 & \forall x \in (0,\pi) \\ =1 & x=0,\ x=\pi \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in (0,\pi) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konbergentea da } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolutuki konbergentea da} \\ x=0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \text{konbergentea da } \forall a>1 \\ \text{dibergentea da } \forall a \leq 1 \end{cases} \\ x=\pi \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} \begin{cases} \text{absolutuki konbergentea da } \forall a>1 \\ \text{baldintzaz konbergentea da (Leibniz) } \forall a \in (0,1] \\ \text{ez da konbergentea } \forall a \leq 0 \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0\right) \end{cases} \end{cases}$$

5.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ berretura-seriearen konbergentzi arloa, eta kalkulatu bere batura.

(1.75 puntu)

Balio absolutuen serieari D´Alambert-en irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{n \cdot 2^n}} = \frac{|x|}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$$

Baldin $x=-2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ baldintzaz konbergentea da (LEIBNIZ).

Baldin $x=2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dibergentea da.

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ konbergentea da $\forall x \in [-2,2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad \forall x \in [-2,2)$

Eta $\exists S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} \overset{(*)}{=} \frac{1/2}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x} \quad \forall x \in (-2,2)$

(*) Serie geometrikoa da, bere arrazoia $r = \frac{x}{2}$

Beraz, integratuz, $S(x) = \int \frac{1}{2-x} dx = -\mathrm{L}(2-x) + K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad \forall x \in (-2,2)$

Eta, baldin $x = 0 \quad \Rightarrow \quad S(0) = -\mathrm{L}2 + K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = \mathrm{L}2$

Orduan, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \mathrm{L}2 - \mathrm{L}(2-x) \quad \forall x \in (-2,2)$

Gainera, $\begin{cases} x = -2 \text{ puntuan } \exists S, \exists f(x) = \mathrm{L}2 - \mathrm{L}(2-x) \text{ eta jarraituak dira} \\ f(x) = S(x) \quad \forall x \in (-2,2) \end{cases}$

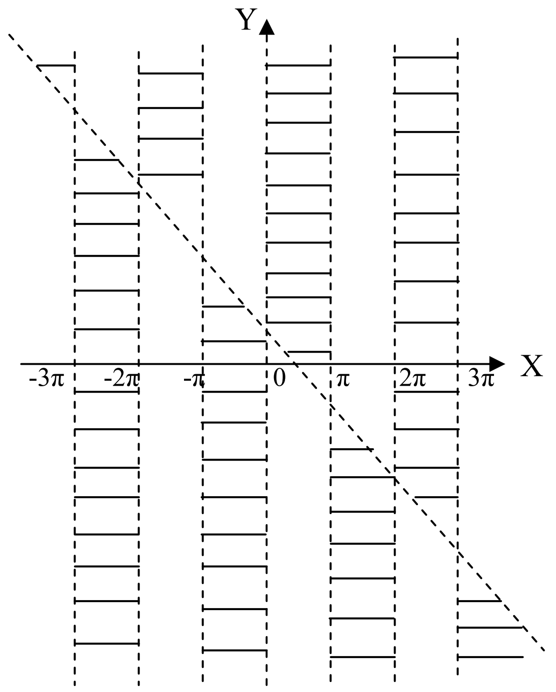
Beraz, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \mathrm{L}2 - \mathrm{L}(2-x) \quad \forall x \in [-2,2)$

6.- Aurkitu analitiko eta grafikoki $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x+y-1) \cdot \sin x}}$ funtzioaren definizio-eremua.

(1.25 puntu)

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x+y-1) \cdot \sin x > 0 \right\}$$

$$(x+y-1) \cdot \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-1 > 0 \text{ eta } \left[\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi, (2k+1)\pi \right) \right] \\ \text{edo} \\ x+y-1 < 0 \text{ eta } \left[\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\pi, 2k\pi \right) \right] \end{cases}$$



7.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^y}{x-y} & \forall(x,y)/x\neq y\\ e^x & \forall(x,y)/x=y\end{cases}$ **funtzioa emanik, kalkulatu bere lehenengo deribatu partzialak.**

(1.5 puntu)

$$\forall(x,y)/x\neq y\quad\begin{cases}f'_x(x,y)=\dfrac{e^x\cdot(x-y)-e^x+e^y}{(x-y)^2}\\ f'_y(x,y)=\dfrac{-e^y\cdot(x-y)+e^x-e^y}{(x-y)^2}\end{cases}$$

Eta $\forall(x,y)/x=y \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(a,a)\quad \forall a\in\mathbb{R}$ **:**

$$f'_x(a,a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,a)-f(a,a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{e^{a+h}-e^a}{a+h-a}-e^a}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{a+h}-e^a-he^a}{h^2}\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to0}\frac{e^{a+h}-e^a}{2h}\overset{(L'H)}{=}$$

$$\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to0}\frac{e^{a+h}}{2}=\frac{e^a}{2}$$

$$f'_y(a,a)=\lim_{k\to0}\frac{f(a,a+k)-f(a,a)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\dfrac{e^a-e^{a+k}}{a-a-k}-e^a}{k}=\lim_{k\to0}\frac{e^a-e^{a+k}+ke^a}{-k^2}\overset{(L'H)}{=}\lim_{k\to0}\frac{-e^{a+k}+e^a}{-2k}\overset{(L'H)}{=}$$

$$\overset{(L'H)}{=}\lim_{k\to0}\frac{-e^{a+k}}{-2}=\frac{e^a}{2}$$

8.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}\left(x^2+y^2\right)\cdot\mathrm{L}\left(1+xy\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik, aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

(Puntu 1)

<u>Bi eratan</u> egin daiteke:

i) Jarraitutasunaren ikasketarekin hasten gara,

$$f \text{ jarraitua da } (0,0) \text{ puntuan } \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{L}\left(x^2+y^2\right)\cdot\mathrm{L}\left(1+xy\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}\overset{(1)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(\rho^2\right)\cdot\mathrm{L}\left(1+\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta\right)}{\sin\left(\rho^2\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(\rho^2\right)\cdot\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\mathrm{L}\left(\rho\right)}_{\nexists}\neq0$$

(1) polarretan adieraziz: $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}\quad\forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan. Orduan *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

ii) Jarraitutasuna aztertu barik, deribatu partzialak kalkulatzen hasiko gara,

$$f_x'(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{L}\left(h^2\right)\cdot \mathrm{L}(1)}{\sin\left(h^2\right)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

Eta, simetriaz, $f_y'(0,0)=0$

Eta orain BBN aplikatuko dugu:

$$f \text{ diferentziagarria } (0,0) \text{ puntuan } \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f_x'(0,0)-k\cdot f_y'(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f_x'(0,0)-k\cdot f_y'(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\mathrm{L}\left(h^2+k^2\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+hk\right)}{\sin\left(h^2+k^2\right)}}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(\rho^2\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta\right)}{\rho\cdot\sin\left(\rho^2\right)}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(\rho^2\right)\cdot\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho^3}=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\mathrm{L}\left(\rho\right)}{\rho}}_{\nexists}\neq 0$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

(2) polarretan adieraziz: $\begin{cases} h=\rho\cdot\cos\theta \\ k=\rho\cdot\sin\theta \end{cases} \quad \forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$

9.- Diferentziala erabiliz, kalkulatu kono baten bolumena kalkulatzean egindako errorea, oinarriaren erradioa (100mm) eta altuera (250mm) neurtu ditugunean, gehienez, neurketa bakoitzean, 1mm–ko errorea egin badugu.

(0.75 puntu)

Konoaren bolumena $B(r,h)=\dfrac{\pi r^2 h}{3}$ funtzio diferentziagarria da.

Beraz, neurketan egindako errorea (bolumenaren aldakuntza hain zuzen ere) diferentzialaren bitartez hurbil daiteke. Hau da:

$$\Delta B=B\left(r_0+\Delta r,h_0+\Delta h\right)-B\left(r_0,h_0\right)\simeq dB\left(r_0,h_0\right)=B_r'\left(r_0,h_0\right)\cdot dr+B_h'\left(r_0,h_0\right)\cdot dh$$

non $r_0=100$, $h_0=250$, $\Delta r=dr=1$ eta $\Delta h=dh=1$

$$B_r'(r,h)=\frac{2\pi rh}{3} \quad\Rightarrow\quad B_r'(100,250)=\frac{50000\pi}{3}$$

$$B_h'(r,h)=\frac{\pi r^2}{3} \quad\Rightarrow\quad B_h'(100,250)=\frac{10000\pi}{3}$$

Orduan, $\Delta B\simeq\dfrac{50000\pi}{3}+\dfrac{10000\pi}{3}=\dfrac{60000\pi}{3}=20000\pi$

(GUZTIRA: 10 puntu)