Ingeniarien Goi Eskola / Escuela Superior de Ingenieros Bilbao — 2015 urtarrilak 12 — Kalkulua

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!}{\left(2n^2\right)^n}}$

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ **,** $p=-2$ **eta** $p=2$ **balioetarako.**

(1.75 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{\left(2n^2\right)^n}}\overset{\text{(Z-E)}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{\left(2n^2\right)^n}\cdot\frac{\left(2(n-1)^2\right)^{n-1}}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2n}{n^{2n}}\cdot\frac{(n-1)^{2n}}{(n-1)^2}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}=2A\iff \text{L}A=\lim_{n\to\infty}2n\cdot\text{L}\left(\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2n\cdot\left(\frac{n-1}{n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}2n\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)=-2$$

$$\iff A=e^{-2}\iff \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{\left(2n^2\right)^n}}=\frac{2}{e^2}$$

b) $$p=-2\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}{0}=\frac{S\in\mathbb{R}^+}{0}=\infty$$

($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: konbergentea)

$$p=2\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n^2}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(STOLZ)}{=}$$

($\sum_{n=1}^{\infty}n^2$: dibergentea)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3-(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3-n^3+3n^2-3n+1}=\frac{1}{3}$$

Oharra: STOLZ erabil daiteke $\{n^3\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea delako.

2.- Izan bitez $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ eta $b_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ gai orokorrak.

a) **Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} a_n$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n$.**

b) **Estudiatu ea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serieak konbergenteak ote diren.**

(2 puntu)

2.- $\{a_n\} = \left\{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\} = \{1,0,-1,0,1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots\}$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\} = \left\{0,\frac{2}{2},0,\frac{2}{4},0,\frac{2}{6},0,\frac{2}{8},0,\frac{2}{10},\ldots\right\} = \left\{0,1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{5},\ldots\right\}$$

a) $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ez da konbergentea

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0+1+0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{5}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, beraz, dibergentea da.

3.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{a^{2n}}$ seriearen izaera $\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$.

(1 puntu)

$\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$, $a_n = \frac{n+1}{a^{2n}} \geq 0 \quad \forall n \Rightarrow$ D'Alambert erabil daiteke:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{a^{2n+2}}\cdot\frac{a^{2n}}{n+1} = \frac{1}{a^2}\begin{cases} <1 \Leftrightarrow a^2>1 \Leftrightarrow |a|>1 \\ >1 \Leftrightarrow a^2<1 \Leftrightarrow |a|<1 \\ =1 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow |a|=1 \end{cases}$$

$|a|>1 \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a<-1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da

$|a|<1 \Leftrightarrow -1<a<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da

$|a|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow a_n = n+1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \forall a \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \text{ konbergentea da} \\ \forall a \in [-1,1]-\{0\} \text{ dibergentea da} \end{cases}$.

4.- a) Aurkitu $f(x)=\dfrac{1}{4}\arctan(4x)+3$ **funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.**

b) Kalkulatu $f^{51)}(0)$**.**

(2 puntu)

a) $f(x)=\dfrac{1}{4}\arctan(4x)+3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{1+16x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-16x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 16^n\cdot x^{2n}$

$$\forall x \,/\, \left|-16x^2\right|=16x^2<1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

Eta aurreko tartean integratuz:

$$f(x)-\underbrace{f(0)}_{=3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 16^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

Baldin $x=-\dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4(2n+1)} \text{ baldintzaz konbergentea} \quad \Rightarrow \quad \exists S \text{ jarraitua}\\ \exists f\left(-\dfrac{1}{4}\right) \text{ jarraitua}\end{cases}$

Baldin $x=\dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{4(2n+1)} \text{ baldintzaz konbergentea} \quad \Rightarrow \quad \exists S \text{ jarraitua}\\ \exists f\left(\dfrac{1}{4}\right) \text{ jarraitua}\end{cases}$

Beraz, $f(x)=3+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 16^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

b) Aurreko atalean lortutako berretura-seriezko garapena f funtzioari dagokion Taylor-en seriea da $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n\right)$.

Beraz, $n=25$ baliorako, $x^{2n+1}=x^{51}$, eta:

$$(-1)^{25}\cdot 16^{25}\cdot\frac{x^{51}}{51}=\frac{f^{51)}(0)}{51!}\cdot x^{51} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f^{51)}(0)}{51!}=-\frac{16^{25}}{51} \quad \Leftrightarrow \quad f^{51)}(0)=-16^{25}\cdot 50!$$

5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki $f(x,y)=\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)\cdot \mathrm{L}\left[x\cdot\left(x^2+y^2-\pi^2\right)\right]}{\sqrt{y-e^x}}$ **funtzioaren definizio-eremua.**

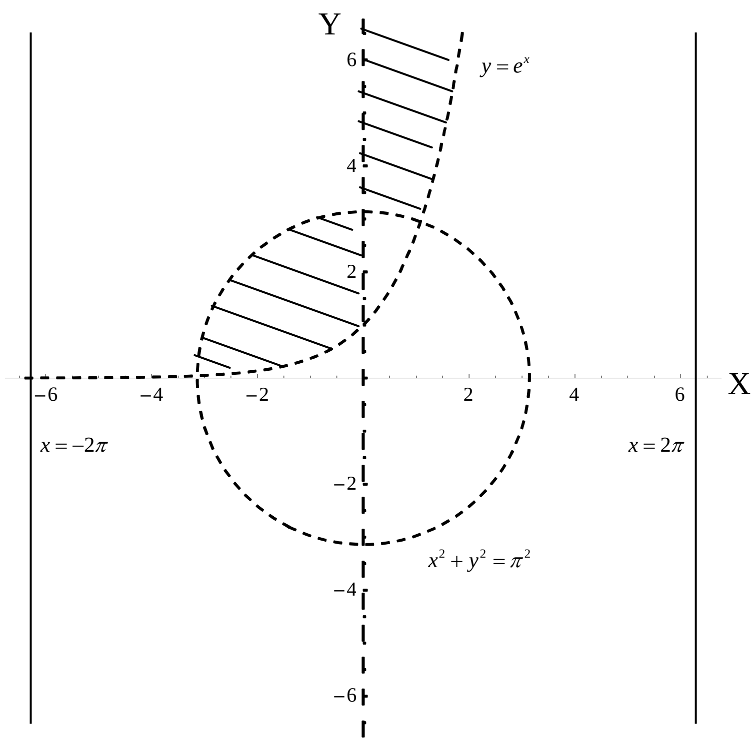
(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -1\le\frac{x}{2\pi}\le 1,\; x\cdot\left(x^2+y^2-\pi^2\right)>0,\; y-e^x>0\right\}$$

$$-1\le\frac{x}{2\pi}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -2\pi\le x\le 2\pi$$

$$y-e^x>0 \quad\Leftrightarrow\quad y>e^x$$

$$x\cdot\left(x^2+y^2-\pi^2\right)>0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x>0 \text{ eta } x^2+y^2>\pi^2 \\ \text{edo} \\ x<0 \text{ eta } x^2+y^2<\pi^2 \end{cases}$$



6.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}\left(1+x^2\right)\cdot\sin y}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Aztertu bere jarraitutasuna $(0,0)$ **puntuan.**

b) Aztertu bere diferentziagarritasuna $(0,0)$ **puntuan.**

(1.75 puntu)

a) *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$. Hau da:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{L}\left(1+x^2\right)\cdot\sin y}{x^2+y^2}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(1+\rho^2\cdot\cos^2\theta\right)\cdot\sin(\rho\cdot\sin\theta)}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^2\cdot\cos^2\theta\cdot\rho\cdot\sin\theta}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta=0=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) Deribatu partzialak existitzen direla frogatzen hasiko gara:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=0$$

Eta orain diferentziagarritasunerako B.B.N erabiliz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{\mathrm{L}\left(1+h^2\right)\cdot\sin k}{h^2+k^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(1+\rho^2\cdot\cos^2\theta\right)\cdot\sin(\rho\cdot\sin\theta)}{\rho^3}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^2\cdot\cos^2\theta\cdot\rho\cdot\sin\theta}{\rho^3}=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\cos^2\theta\cdot\sin\theta}_{\nexists}$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

(*) Polarretan adieraziz:

a) atalean $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

b) atalean $\begin{cases}h=\rho\cdot\cos\theta\\ k=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

7.- Kalkulatu $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{(x-y)^2} & \forall(x,y)\,/\,x\neq y\\ x-1 & \forall(x,y)\,/\,x=y\end{cases}$ **funtzioaren deribatu partzialak** $(1,1)$ **puntuan.**

(1 puntu)

$$f'_x(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}=\infty$$

$$f'_y(1,1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{(-k)^2}-0}{k}=0$$

8.- Izan bedi $z=f(x,y)$ **funtzio diferentziagarria** $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$**. Baldin** $f(0,0)=3$**,** $f(0.1,\ 0)=3.01$ **eta** $f(0.1,\ 0.2)=3.018$ **balioak ezagutzen badira, kalkulatu *f*-ren deribatu partzialen balio hurbilduak** $(0,0)$ **puntuan.**

(1 puntu)

f funtzio diferentziagarria denez $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta f\simeq df \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Hau da:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta f = f(x+h,y+k)-f(x,y)\simeq df(x,y)=f'_x(x,y)\cdot dx+f'_y(x,y)\cdot dy$$

non $h=dx$ eta $k=dy$

$(0,0)$ puntuan aplikatuz:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0)=3\\ f(0.1,\ 0)=3.01\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad h=dx=0.1,\ k=dy=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \Delta f=0.01\simeq df(0,0)=f'_x(0,0)\cdot(0.1) \quad\Rightarrow\quad f'_x(0,0)\simeq\frac{0.01}{0.1}=0.1$$

Era berean:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0)=3\\ f(0.1,\ 0.2)=3.018\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad h=dx=0.1,\ k=dy=0.2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \Delta f=0.018\simeq df(0,0)=f'_x(0,0)\cdot(0.1)+f'_y(0,0)\cdot(0.2) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f'_y(0,0)\simeq\frac{0.018-f'_x(0,0)\cdot(0.1)}{0.2}\simeq\frac{0.018-0.01}{0.2}=\frac{0.008}{0.2}=0.04$$