Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(4n^3-2n+3\right)\cdot \mathrm{L}\left(\cos\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right)\cdot \arctan\left(e^{1/n^2}-1\right)}{\sin\left(\dfrac{3}{n}\right)\cdot \arctan\left(\dfrac{n^2+1}{n+3}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi n+1}{n-2}\right)}$

(1.25 puntu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4n^3-2n+3\right)\cdot \mathrm{L}\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)\cdot \arctan\left(e^{1/n^2}-1\right)}{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot \arctan\left(\frac{n^2+1}{n+3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi n+1}{n-2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)-1\right)\cdot\left(e^{1/n^2}-1\right)}{\frac{3}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(-1)}=$$

$$=-\frac{8}{3\pi}\lim_{n\to\infty}n^4\cdot\frac{-\left(\frac{1}{2n}\right)^2}{2}\cdot \mathrm{L}\left(e^{1/n^2}\right)=\frac{8}{3\pi}\lim_{n\to\infty}n^4\cdot\frac{1}{8n^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{3\pi}$$

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}}$

(0.5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}\overset{(1)}{=}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}}\overset{(2)}{=}\frac{\infty}{1}=\infty$$

(1) Izendatzaileko limitean zatidura-errodura irizpidea erabiliz.

(2) Zenbakitzailean serie Harmonikoa dugu, dibergentea hain zuzen ere.

3.- Aztertu hurrengo serieen izaera:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4$

(Puntu 1)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, serie Harmonikoa, beraz, dibergentea.

b) $a_n=\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4 \geq 0 \quad \forall n$. Konparaziozko irizpidea erabiliz:

$a_n=\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4 \sim \frac{1}{n^4}$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ konbergentea da. Beraz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4$ konbergentea da.

4.- Zenbat batugaia batu behar dira $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$ seriean, bere baturaren balio hurbildua lortzeko, egindako errorea 0.001 baino txikiagoa izan dadin? Garapena arrazoitu.

(0.75 puntu)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$ serie alternatuak Leibniz-en teorema egiaztatzen du, beraz hurrengo emaitza biak egiaztatzen dira:

$$\exists S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ ,\ S\in\mathbb{R} \quad \text{eta} \quad \left|S-S_n\right|<\left|a_{n+1}\right|$$

non $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$.

Kasu honetan, $\left|S-S_n\right|<0.001=\dfrac{1}{1000}$ bete dadin:

$$\left|S-S_n\right|<\left|a_{n+1}\right|=\frac{1}{3n+4}\leq\frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad 3n+4\geq 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 3n\geq 996 \quad \Leftrightarrow \quad n\geq 332$$

Beraz, 332 batugai hartu behar dira.

5.- a) Kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{e^n}\cdot x^n$ berretura-seriearen batura, non balio duen adieraziz.

b) Aurreko emaitza erabiliz, kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{e^n\cdot 2^n}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{e^n}$ serieen batura.

(2 puntu)

a) Has gaitezen bere konbergentzi arloa kalkulatzen:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot|x|^{n+1}}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{(n+1)\cdot|x|^n}=\frac{|x|}{e}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<e \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-e,e)$$

Baldin $x=e \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)$ ez da konbergentea.

Baldin $x=-e \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$ dibergentea da.

Beraz, $\exists S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{e^n}\cdot x^n \quad \forall x\in(-e,e)$, eta integragarria da tarte horretan:

$$\exists\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^n}\cdot x^{n+1}\overset{(*)}{=}\frac{\frac{-x^2}{e}}{1+\frac{x}{e}}=\frac{-x^2}{x+e} \quad \forall x\in(-e,e)$$

(*) Serie geometrikoa, arrazoia $r=-\frac{x}{e}$.

Eta emaitza hau deribatuz:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{e^n}\cdot x^n=\left(\frac{-x^2}{x+e}\right)'=\frac{-x^2-2xe}{(x+e)^2} \quad \forall x\in(-e,e)$$

b) Berretura-seriean $x=\frac{1}{2}$ egiten badugu, lehenengo seriea lortzen da, beraz,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{e^n\cdot 2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{4}-e}{\left(\frac{1}{2}+e\right)^2}=\frac{-1-4e}{(1+2e)^2}$$

Bigarren seriea, berriz, $x=-3$ baliorako ateratzen da. Baina $-3\notin(-e,e)$, beraz, seriea ez da konbergentea. Eta gai ez-negatiboz osaturik dagoenez, orduan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{e^n}=\infty$.

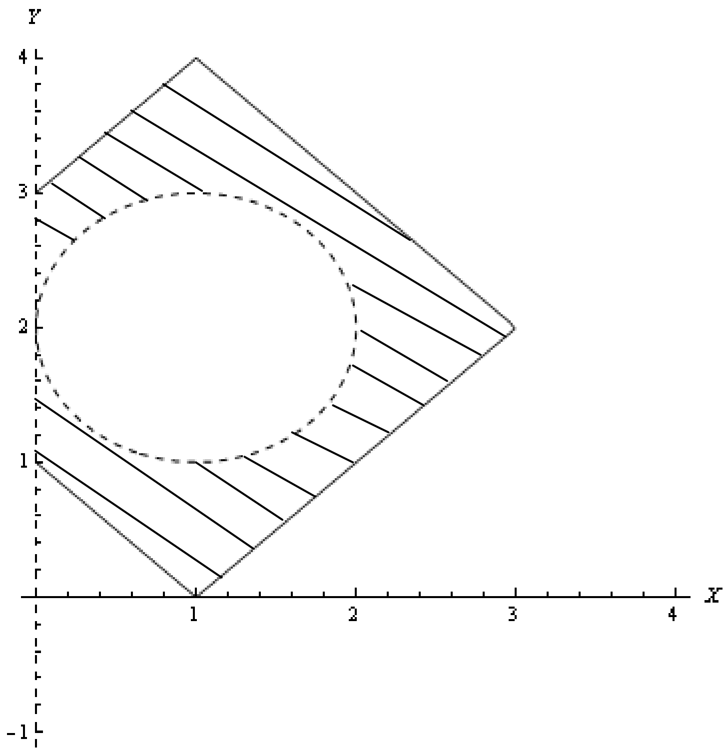
6.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\sqrt{x\cdot(\mathrm{L}x)^2}+\sqrt{2-|y-2|-|x-1|}\cdot\mathrm{L}\left((x-1)^2+(y-2)^2-1\right)$$

(Puntu 1)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x>0,\ x\cdot(\mathrm{L}x)^2\geq 0,\ 2-|y-2|-|x-1|\geq 0,\ (x-1)^2+(y-2)^2-1>0\right\}$$

- $\left.\begin{array}{l} x>0 \\ x\cdot(\mathrm{L}x)^2\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad (\mathrm{L}x)^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x>0$ ($x<0$ denean ez baita existitzen).
- $2-|y-2|-|x-1|\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|+|y-2|\leq 2$ (erronboa eta barrukoa)
- $(x-1)^2+(y-2)^2>1$ (zirkunferentziaren kanpokoa)



7.- Bi aldagaiko funtzio baten diferentziala erabiliz, lortu, gutxi gorabehera, zenbat balio duen $\arctan\left(\frac{1.1}{0.8}\right)$ **adierazpenak. Garapena arrazoitu.**

(1.25 puntu)

Izan bedi $f(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, bi aldagaiko funtzio diferentziagarria (1,1) puntuan. Orduan, puntu horretan:

$$\Delta f \simeq df \quad \Leftrightarrow \quad f(1.1,0.8)-f(1,1)\simeq f'_x(1,1)\cdot dx+f'_y(1,1)\cdot dy$$

non $dx=0.1$, $dy=-0.2$ eta $f(1,1)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$. Eta:

$$f'_x(x,y)=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,1)=\frac{1}{2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{-x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,1)=-\frac{1}{2}$$

Beraz,

$$f(1.1,0.8)-f(1,1)\simeq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}=\frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad f(1.1,0.8)=\arctan\left(\frac{1.1}{0.8}\right)\simeq\frac{\pi}{4}+\frac{3}{20}$$

8.- $f(x,y)=\begin{cases}\left(2x^2+2y^2\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) **Kalkulatu bere lehenengo deribatu partzialak** $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$**.**

b) **Aztertu bere diferentziagarritasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

c) **Estudiatu bere lehenengo deribatu partzialen jarraitutasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

(2.25 puntu)

a) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ $\begin{cases} f'_x(x,y)=4x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ f'_y(x,y)=4y\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{cases}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h^2\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h}=\lim_{h\to0}2h\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)=0$$

Eta, simetriaz, $f'_y(0,0)=0$

b) B.B.N erabiliz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_k(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left(2h^2+2k^2\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}2\sqrt{h^2+k^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)=0$$

Beraz, *f* diferentziagrria da $(0,0)$ puntuan.

c) *x*-rekiko deribatu partziala jarraitua da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)=f'_x(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[4x\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]=$$

$$=0-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{2\rho\cdot\cos\theta}{\rho}\cdot\cos\left(\frac{1}{\rho}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}2\cos\theta\cdot\cos\left(\frac{1}{\rho}\right)}_{\nexists}\quad\Rightarrow\quad f'_x \text{ ez da jarraitua } (0,0) \text{ puntuan.}$$

Eta, simetriaz, f'_y ez dela jarraitua $(0,0)$ puntuan esan dezakegu.