Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha^n}{n}\right)\cdot\left(n^{1/n}-1\right)}{\mathrm{L}n} \quad \forall\alpha>0$ **(Puntu 1)**

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{1}\right)+\mathrm{L}\left[\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^4\right]+\ldots+\mathrm{L}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right]}{n^2}$ **(Puntu 1)**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \overset{(z-e)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1 \quad \Rightarrow \quad n^{1/n}-1 \sim \mathrm{L}\left(n^{1/n}\right) \quad \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sin\left(\frac{\alpha^n}{n}\right)\cdot\left(n^{1/n}-1\right)}{\mathrm{L}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sin\left(\frac{\alpha^n}{n}\right)\cdot\mathrm{L}\left(n^{1/n}\right)}{\mathrm{L}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sin\left(\frac{\alpha^n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\mathrm{L}n}{\mathrm{L}n} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\alpha^n}{n}\right)$$

$$\forall\alpha>0 \quad \lim_{n\to\infty}\alpha^n = \begin{cases}\infty & \forall\alpha>1\\ 1 & \alpha=1\\ 0 & \forall\alpha<1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n} = \begin{cases}\infty & \forall\alpha>1 \quad (\alpha^n \gg n)\\ 0 & \forall\alpha\le 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\forall\alpha>1 & \nexists \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\alpha^n}{n}\right)\\ \forall\alpha\le 1 & \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\alpha^n}{n}\right)=0\end{cases}$$

Beraz, $\forall\alpha>0 \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha^n}{n}\right)\cdot\left(n^{1/n}-1\right)}{\mathrm{L}n}\begin{cases}\nexists & \forall\alpha>1\\ =0 & \forall\alpha\le 1\end{cases}$

b) $\left\{n^2\right\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz erabil daiteke:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{1}\right)+\mathrm{L}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^4\right]+\ldots+\mathrm{L}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2-(n^2-2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\frac{1}{n}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

2.- Aztertu hurrengo serieen izaera:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ **(Puntu 1)**

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **(Puntu 1)**

a) $a_n=\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}\geq 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow$ D´Alembert erabil daiteke:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{(n!)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=\frac{1}{27}<1 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ konbergentea da.

b) $a_n=(-1)^n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad |a_n|=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|=e\neq 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ez da konbergentea (baldintza beharrezkoa betetzen ez baita).

3.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)+\left(\frac{2}{a}\right)^n\right]$ seriearen izaera, $a>0$ parametroaren balioen arabera.

(1.5 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)+\left(\frac{2}{a}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+d_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} b_n=\sin\left(\dfrac{1}{n^2+3}\right)\geq 0 \\ d_n=\left(\dfrac{2}{a}\right)^n\geq 0 \quad \forall a>0 \end{array}\right\}\forall n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+d_n)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}d_n$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ serieari konparaziozko irizpidea aplikatuko diogu:

$$\left.\begin{array}{l} b_n=\sin\left(\dfrac{1}{n^2+3}\right)\sim\dfrac{1}{n^2+3}\sim\dfrac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ konbergentea da} \end{array}\right\}\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{ konbergentea da}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ serie geometrikoa da, arrazoia $r=\frac{2}{a}$.

Beraz, konbergentea da $\quad\Leftrightarrow\quad |r|=\left|\frac{2}{a}\right|=\frac{2}{a}<1 \quad\Leftrightarrow\quad a>2$

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+d_n)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}d_n \begin{cases}\text{konbergentea da } \forall a>2 \\ \text{dibergentea da } \forall a\leq 2\end{cases}$

4.- a) Aurkitu $f(x) = \mathrm{L}\left(1 + x^4\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Aurreko garapena erabiliz, kalkulatu zenbat batugai hartu behar dira $\mathrm{L}2$ -ren balio hurbildua lortzeko, $\varepsilon = 0.01$ baino errore txikiagoarekin.

(2.75 puntu)

a) $f'(x) = \dfrac{4x^3}{1+x^4} \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 4x^3 \cdot \left(-x^4\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 4 \cdot x^{4n+3} \quad \forall x \in (-1,1)$

(1) $r = -x^4$ arrazoiko serie geometrikoaren batura.
Konbergentea $\Leftrightarrow \quad |r| = \left|-x^4\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1,1)$

Eta integratuz $[0, x]$ tartean $\forall x \in (-1,1)$:

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 4 \cdot \frac{x^{4n+4}}{4n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+4}}{n+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$x = \pm 1$ puntuetan $\begin{cases} \exists f \text{ jarraitua} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea da } (\textit{Leibniz}) \Rightarrow \text{ Batura jarraitua dago} \end{cases}$

Orduan, $f(x) = \mathrm{L}\left(1 + x^4\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{4n+4}}{n+1} \quad \forall x \in [-1,1]$

b) Baldin $x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}2 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Serie alternatu honek Leibniz egiaztatzen du, beraz:

$$\varepsilon = |S - S_n| = |\mathrm{L}2 - S_n| < |a_{n+1}| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right| = \frac{1}{n+2}$$

Orduan, $\mathrm{L}2$ -ren balio hurbildua lortzeko, $\varepsilon = 0.01$ baino errore txikiagoarekin:

$$\varepsilon < \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad n + 2 \ge 100 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 98$$

Hau da, $\mathrm{L}2 \simeq \sum_{n=0}^{98} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ (99 batugai).

5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}\left(4-|x|-|y|\right)}{\sqrt{(x+4)^2+y^2-9}}+\mathrm{L}\left(xy\right)$$

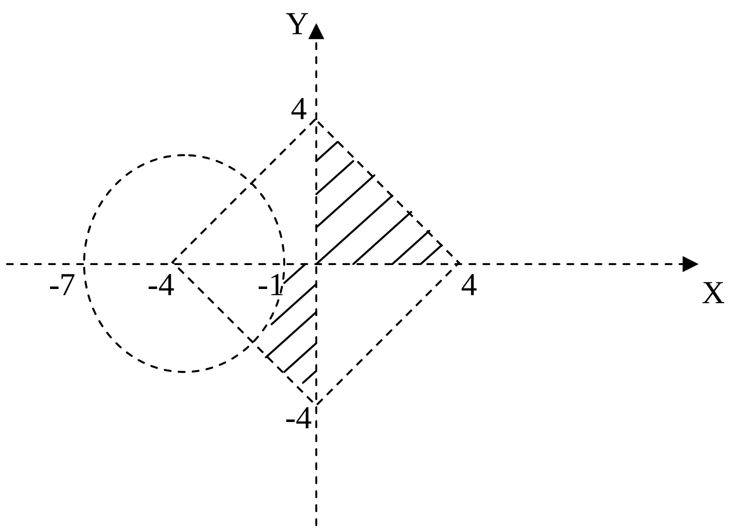
(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 4-|x|-|y|>0,\ (x+4)^2+y^2-9>0,\ xy>0\right\}$$

- $4-|x|-|y|>0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|+|y|<4$ (erronboaren barrukoa)

- $(x+4)^2+y^2-9>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2+y^2>9$ (zirkunferentziaren kanpokoa)

- $xy>0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0 \ \text{ eta } \ y>0 \\ x<0 \ \text{ eta } \ y<0 \end{cases}$ (lehenengo eta hirugarren koadranteak)



6.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot e^{x+y}}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.

c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

(2 puntu)

a) f jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\in\mathbb{R}$

Kasu honetan $f(0,0)=0$.

Eta $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\cdot e^{x+y}}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2} \overset{\text{(polarretan)}}{=}$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}} \frac{\rho\cdot\cos\theta}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}} \frac{\cos\theta}{\rho}\notin\mathbb{R} \quad\Rightarrow f \text{ ez da jarraitua (0,0) puntuan}$$

(Eten gaindiezina).

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{h\cdot e^h}{h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h}{h^2}=\infty$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0\cdot e^k}{k^2}}{k}=\lim_{h\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) f ez da jarraitua (0,0) puntuan, beraz ezin da diferentziagarria izan puntu horretan.

Oharra:

a) atalean egindako aldaketa polarretan adierazteko, honako hau da: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases}$

7.- Aztertu $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{y}$ **funtzioaren jarraitutasuna** $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$**. Jarraitua ez denean, eten mota aztertu.**

(1.25 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\neq 0\right\}$$

$\forall(x,y)\in D$, f jarraitua da (funtzio jarraituen konposaketa)

$\forall(x,y)\notin D$, f etena da. Puntu hauetan, $(x,y)=(a,0)$ $\forall a\in\mathbb{R}$ alegia, eten mota aztertuko dugu:

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,0)}\frac{\sin(xy)}{y}\overset{\text{(polarretan)}}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\neq0,\pi}}\frac{\sin\left((a+\rho\cdot\cos\theta)\cdot\rho\cdot\sin\theta\right)}{\rho\cdot\sin\theta}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\neq0,\pi}}\frac{(a+\rho\cdot\cos\theta)\cdot\rho\cdot\sin\theta}{\rho\cdot\sin\theta}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\neq0,\pi}}(a+\rho\cdot\cos\theta)=a$$

Beraz, $\forall a\in\mathbb{R},\;\;(x,y)=(a,0)$ puntuetan eten gaindigarria dago. Honako hau litzateke f funtzioaren jarraitutasunez hedapena:

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y} & \forall(x,y)\neq(x,0)\\ x & \forall(x,y)=(x,0)\end{cases}$$

Oharrak:

1.- Polarretan adieraztean egindako aldaketa, honako hau da: $\begin{cases}x=a+\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

2.- Ariketak ez du eskatzen f funtzioaren jarraitutasunez hedapenaren definizioa.