Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Kalkulatu $a \in \mathbb{R}$ **eta** $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^2+n\right)\cdot\left(\sqrt[n]{2e}-1\right)}{\tan^a\left(\frac{1}{n}\right)} = A$ **bete dadin.**

b) Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+4+9+\ldots+n^2}{a^n} \quad \forall a > 0$.

(2 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+n\right)\cdot\left(\sqrt[n]{2e}-1\right)}{\tan^a\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot \mathrm{L}\left(\sqrt[n]{2e}\right)}{\frac{1}{n^a}} = \lim_{n\to\infty} n^{a+2}\cdot\frac{1}{n}\mathrm{L}\left(2e\right) = \mathrm{L}\left(2e\right)\cdot\lim_{n\to\infty} n^{a+1} =$$

$$= A = \begin{cases} \infty & \text{baldin } a+1>0 \Leftrightarrow a>-1 \\ 0 & \text{baldin } a+1<0 \Leftrightarrow a<-1 \\ \mathrm{L}(2e) & \text{baldin } a+1=0 \Leftrightarrow a=-1 \end{cases}$$

Beraz, $A \in \mathbb{R} - \{0\}$ denez, emaitza beteko da $\Leftrightarrow a=-1$ eta $A = \mathrm{L}(2e)$

b) $$\forall a>0 \quad \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \forall a>1 \\ 0 & \forall a<1 \\ 1 & a=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1+4+9+\ldots+n^2}{a^n} = \begin{cases} \dfrac{\infty}{\infty} & \forall a>1 \\ \dfrac{\infty}{0}=\infty & \forall a<1 \\ \dfrac{\infty}{1}=\infty & a=1 \end{cases}$$

Eta orain, $\forall a>1$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+9+\ldots+n^2}{a^n} \underset{(*)}{\overset{(STOLZ)}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n-a^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)} \overset{\left(n^2 \ll a^n\right)}{=} 0$$

Beraz, $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+9+\ldots+n^2}{a^n} = \begin{cases} 0 & \forall a>1 \\ \infty & \forall a\le 1 \end{cases}$$

(*) *Stolz*: $\forall a>1$ $\left\{a^n\right\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da.

2.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{a^n}+\frac{n^{10}+15}{3^n+5}\right)$ **seriearen izaera** $\forall a>0$**.**

(2 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{a^n}+\frac{n^{10}+15}{3^n+5}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)\overset{(*)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$(*)\ \begin{cases} a_n=\dfrac{2n}{a^n}\geq 0 \quad \forall a>0 \ \text{ eta } \ \forall n \\ b_n=\dfrac{n^{10}+15}{3^n+5}\geq 0 \quad \forall n \end{cases}$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ konbergentea da $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konbergenteak dira.

- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ seriearen izaera aztertzeko, D´Alambert-en irizpidea aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{2n}=\frac{1}{a}\begin{cases} <1 & \Leftrightarrow & a>1 & \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ konbergentea da} \\ >1 & \Leftrightarrow & a<1 & \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ dibergentea da} \\ =1 & \Leftrightarrow & a=1 & \Rightarrow & a_n=2n \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ dibergentea da} \end{cases}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ seriearen izaera aztertzeko, D´Alambert-en irizpidea ere aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}+15}{3^{n+1}+5}\cdot\frac{3^n+5}{n^{10}+15}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^{10}}=\frac{1}{3}<1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ konbergentea da}$$

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{a^n}+\frac{n^{10}+15}{3^n+5}\right)$ konbergentea da $\forall a>1$ eta dibergentea da $\forall a\leq 1$.

3.- Aurkitu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{4n+2}}{2n+1}$ **berretura-seriearen konbergentzi arloa eta batura eremu horretan.**

(2 puntu)

Balio absolutuen serieari D´Alambert-en irizpidea aplikatuko diogu:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{4n+6}}{2n+3}\cdot\dfrac{2n+1}{x^{4n+2}}=x^4<1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-1,1) \\ \text{Baldin } x=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} \text{ konbergentea da (*)}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

konbergentea da $\forall x\in[-1,1] \quad \Rightarrow \quad \exists S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{4n+2}}{2n+1} \quad \forall x\in[-1,1]$

(*) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ serie alternatuak Leibniz-en teorema betetzen du.

Eta $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{4n+2}}{2n+1}$ deribagarria da $\forall x\in(-1,1)$, hau da:

$$\exists S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(4n+2)\frac{x^{4n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2\cdot x^{4n+1}\overset{(**)}{=}\frac{2x}{1+x^4} \quad \forall x\in(-1,1)$$

(**) $r=-x^4$ arrazoiko serie geometrikoa da.

Emaitza hori integratuz, $S(x)-\underbrace{S(0)}_{=0}=\arctan\left(x^2\right) \quad \forall x\in(-1,1)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Beraz, } S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{4n+2}}{2n+1}=\arctan\left(x^2\right)=f(x) \quad \forall x\in(-1,1) \\ \text{Baina } x=\pm 1 \text{ puntuetan } \exists S \text{ eta } \exists f \text{ jarraituak}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+2}}{2n+1}=\arctan\left(x^2\right) \quad \forall x\in[-1,1]$$

4.- Izan bedi $[0,1]$ tartean laugarren maila arte deribatu jarraituak dituen $y = f(x)$ funtzioa. Baldin bere Mclaurin-en 3. mailako polinomioa $P_3(x) = 1 - x + \frac{x^3}{3}$ bada:

a) Kalkulatu, gutxi gorabehera, *f*-ren balioa $x = \frac{1}{10}$ puntuan.

b) Aurkitu $f'(0)$ eta $f''(0)$.

c) Baldin $\left|f^{4)}(x)\right| < 4 \quad \forall x \in [0,1]$, mugatu sortutako errorea a) atalean egindako hurbilketan.

(2 puntu)

a) $x = 0$ puntuaren inguruneko puntuetarako, $f(x) = P_3(x) + r_3(x)$ egiaztatzen da, non $r_3(x)$ Mclaurin-en 3. mailako polinomioari dagokion Lagrange-ren hondarra den. Ariketa honetan, ingurune hori $[0,1]$ tartea da. Beraz:

$$f(x) \simeq P_3(x) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{10}\right) \simeq P_3\left(\frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{3000} = \frac{2701}{3000}$$

b) Definizioz, $y = f(x)$ funtzioaren Mclaurin-en 3. mailako polinomioa honako hau da:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3$$

Emandakoarekin konparatuz: $f'(0) = -1$ eta $f''(0) = 0$

c) $f(x) = P_3(x) + r_3(x) \quad \Leftrightarrow \quad r_3(x) = f(x) - P_3(x) \quad \Rightarrow \quad errorea = \left|f(x) - P_3(x)\right| = \left|r_3(x)\right|$

Non $r_3(x) = \frac{f^{4)}(\theta x)}{4!} \cdot x^4, \quad 0 < \theta < 1$

Orduan, $errorea = \left|r_3(x)\right| = \left|\frac{f^{4)}(\theta x)}{4!} \cdot x^4\right| \quad \forall x \in [0,1]$

Eta $x = \frac{1}{10}$ puntuko balioa kalkulatzean egindako errorea:

$$errorea = \left|r_3\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \left|\frac{f^{4)}\left(\frac{\theta}{10}\right)}{4!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4\right| < \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4}{4!} = \frac{1}{3! \cdot 10^4} = \frac{1}{60000}$$

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

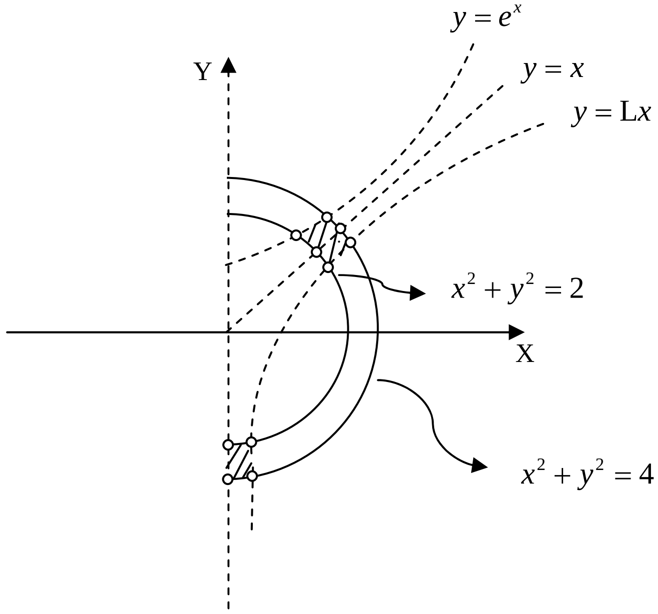
5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}(e^x-y)}{\arctan(x-y)}+\frac{\arcsin(x^2+y^2-3)}{\sqrt{y-\mathrm{L}\,x}}$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ e^x-y>0,\ \arctan(x-y)\neq 0,\ -1\le x^2+y^2-3\le 1,\ x>0,\ y-\mathrm{L}\,x>0\right\}$$

- $x>0$
- $\left.\begin{array}{l} e^x-y>0 \iff y<e^x \\ y-\mathrm{L}\,x>0 \iff y>\mathrm{L}\,x \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{L}\,x<y<e^x$
- $\arctan(x-y)\neq 0 \iff x-y\neq 0 \iff x\neq y$
- $-1\le x^2+y^2-3\le 1 \iff 2\le x^2+y^2\le 4$



6.- $f(x,y)=\begin{cases}\tan\left(\dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) **Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
b) **Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
c) **Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**
d) **Kalkulatu (0,0) puntuan bere deribatu direkzionala $\vec{u}=(1,1)$ bektorearen norabidean.**

(3 puntu)

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\tan\left(\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\right)\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\tan\left(\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}\right)=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\tan\left(\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\right)=\tan 0=0=f(0,0)\quad\Leftrightarrow\quad f \text{ jarraitua da (0,0) puntuan.}$$

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\tan\left(\dfrac{0}{h^2}\right)-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{h}=\lim_{k\to0}\frac{\tan\left(\dfrac{0}{k^2}\right)-0}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) Baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\tan\left(\dfrac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\left|\tan\left(\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\right)\right|}{\rho}\sim\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\left|\sin\theta\right|}{\rho}=\cos^2\theta\cdot\left|\sin\theta\right|\neq0\quad\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ f ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

d) f diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan $\Rightarrow$ f-ren deribatu direkzionala definizioz kalkulatu beharko dugu:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to0}\frac{f\left(\lambda h_1,\lambda h_2\right)-f(0,0)}{\lambda}\quad\forall\vec{u}=\left(h_1,h_2\right)\text{ unitario}$$

Beraz, $$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\tan\left(\dfrac{\lambda^3\cdot h_1^2\cdot h_2}{\lambda^2\cdot\left(h_1^2+h_2^2\right)}\right)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\tan\left(\lambda\cdot h_1^2\cdot h_2\right)}{\lambda}\sim\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda\cdot h_1^2\cdot h_2}{\lambda}=h_1^2\cdot h_2\ (**)$$

Kasu honetan, $\vec{u}=(1,1)\quad\Rightarrow\quad\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unitarioa da eta

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(*) Limitea polarretan kalkulatuz.

(**) $\forall \vec{u} = (h_1, h_2)$ unitario, $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = h_1^2 \cdot h_2 \in \mathbb{R}$ atera zaigu. Beraz, f deribagarria dela frogatu dugu.

7.- Eskualde bat zeharkatzen duen gasbide batean, $P(0,0)$ puntuan jatorria duen jarioa detektatu da. Eskualdean egindako azterketaren ondorioz, (x,y) puntu bakoitzean gasaren kontzentrazioa $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y}$ funtzioak ematen duela determinatu da.

a) Zein da gasaren kontzentrazioa $A(1,1)$ eta $B(0,1)$ puntuetan? Aurkitu A eta B puntuetan lortutako gasaren kontzentrazio berdineko kurben ekuazioak. Adierazi grafikoki kurba hauek.

b) A eta B puntuetarako, zein norabidetan handiagotu da arinen gasaren kontzentrazioa? Eta zeinetan ez da aldatzen kontzentrazio hori?

c) Baldin B puntutik $\vec{u}=(1,3)$ bektoreak emandako norabidea hartzen badugu, gasaren kontzentrazioa handiagotu edo txikituko da?

(3 puntu)

a) Gasaren kontzentrazioa $A(1,1)$ puntuan: $f(A)=f(1,1)=\dfrac{1}{2}$

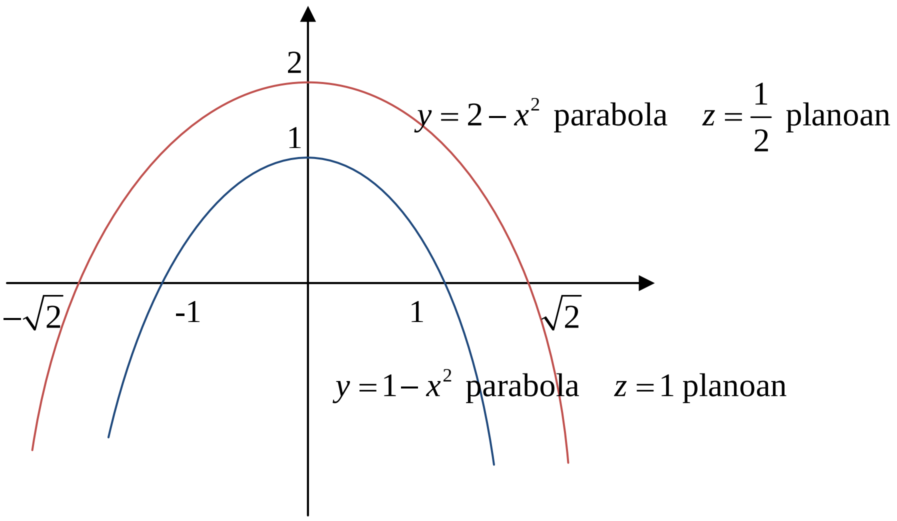
Gasaren kontzentrazioa $B(0,1)$ puntuan: $f(B)=f(0,1)=1$

A puntuan lortutako gasaren kontzentrazio berdineko kurba:

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y}=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y=2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y=2-x^2 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

B puntuan lortutako gasaren kontzentrazio berdineko kurba:

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y=1-x^2 \\ z=1 \end{cases}$$



b) Gasaren kontzentrazioa arinen handiagotuko da gradientearen norabidean.

$$f'_x(x,y)=\frac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} f'_x(A)=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2} \\ f'_x(B)=0 \end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{-1}{\left(x^2+y\right)^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} f'_y(A)=-\dfrac{1}{4} \\ f'_y(B)=-1 \end{cases}$$

Orduan:

A punturako, gasaren kontzentrazioa arinen handiagotuko da $\overrightarrow{\nabla f}(A)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ norabidean.
Eta B punturako, gasaren kontzentrazioa arinen handiagotuko da $\overrightarrow{\nabla f}(B)=\left(0,-1\right)$ norabidean.

Gasaren kontzentrazioa, berriz, ez da aldatzen gradientearekiko norabide perpendikularrean. Beraz:

A punturako, gasaren kontzentrazioa ez da aldatzen $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ norabidean.

B punturako, gasaren kontzentrazioa ez da aldatzen $\left(1,0\right)$ norabidean.

c) Oro har, gasaren kontzentrazioaren aldakuntza deribatu direkzionalak adierazten du. Hortaz, $\vec{u}=(1,3) \quad\Rightarrow\quad |\vec{u}|=\sqrt{10} \quad\Rightarrow\quad \vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ unitarioa da, eta:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_B = f'_x(B)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+f'_y(B)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}<0 \quad\Rightarrow$$ gasaren kontzentrazioa txikituko da.