KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 4 (A eredua)

| |
|---|
| IZEN-ABIZENAK: |
| TALDEA: |

**1.- Hurrengo hiru integraletarako, erantzun bi galdera hauek:**

**a) Integral inpropioak dira? Baiezko kasuan, identifikatu bere puntu singularrak.**

**b) Bere kalkulu zuzenerako, deskonposatu behar dira? Baiezko kasuan, adieraz ezazu deskonposaketa hori. <u>Ez dituzu integralak kalkulatu behar</u>.**

**i)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$ **ii)** $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\mathrm{L}x}$ **iii)** $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\sin x}{x-\pi}dx$

**(3 puntu)**

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^{\infty} f(x)dx$ non $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,\infty) - \{1\}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=1$ puntu singularra da. Baita $\infty$ ere.

Integral inpropioa da, eta deskonposatu behar dugu bere kalkulurako:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^{a} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}, \quad 1<a<\infty \text{ izanik.}$$

ii) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\mathrm{L}x} = \int_1^{2} f(x)dx$ non $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{L}x} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (1,2]$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=1$ puntu singularra da.

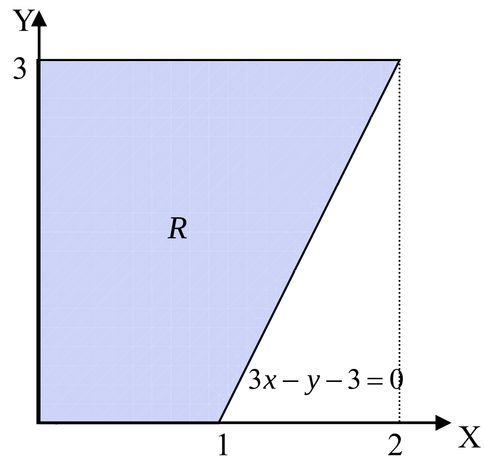
Integral inpropioa da, eta ez da beharrezkoa deskonposatzea bere kalkulurako.

iii) $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\sin x}{x-\pi}dx = \int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)dx$ non $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-\pi} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

$\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) = \dfrac{0}{0} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim\limits_{x\to \pi^+} \cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x=\pi$ ez da puntu singularra.

Beraz, ez da integral inpropioa.

**2.- Izan bedi XY planoko *R* eskualdea:**




a) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, *R* eskualdearen azalera ematen duen integral mugatua.**

b) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OX ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena ematen duen integral mugatua.**

c) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OY ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena ematen duen integral mugatua.**

**(3 puntu)**

a) Azalera($R$) $= \int_0^3 \frac{y+3}{3}\,dy = \int_0^2 3\,dx - \int_1^2 (3x-3)\,dx$

b) Bolumena(OX) $= \int_0^3 2\pi y \cdot \frac{y+3}{3}\,dy = \int_0^2 9\pi\,dx - \int_1^2 \pi(3x-3)^2\,dx$

c) Bolumena(OY) $= \int_0^3 \pi\left(\frac{y+3}{3}\right)^2 dy = \int_0^2 2\pi x \cdot 3\,dx - \int_1^2 2\pi x(3x-3)\,dx$

KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 3 (B eredua)

| |
|---|
| IZEN-ABIZENAK: |
| TALDEA: |

**1.- Hurrengo hiru integraletarako, erantzun bi galdera hauek:**

**a) Integral inpropioak dira? Baiezko kasuan, identifikatu bere puntu singularrak.**

**b) Bere kalkulu zuzenerako, deskonposatu behar dira? Baiezko kasuan, adieraz ezazu deskonposaketa hori. <u>Ez dituzu integralak kalkulatu behar</u>.**

**i)** $\int_{-\infty}^{\infty} \arctan x \, dx$ **ii)** $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} dx$ **iii)** $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{1 - e^x}$

**(3 puntu)**

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \arctan x \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ non $f(x) = \arctan x \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Puntu singularrak ∞ eta -∞ dira.

Integral inpropioa da, eta deskonposatu behar dugu bere kalkulurako:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \arctan x \, dx = \int_{-\infty}^{0} \arctan x \, dx + \int_{0}^{\infty} \arctan x \, dx .$$

ii) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} dx = \int_{0}^{\pi/2} f(x) dx$ non $f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{0}{0} \overset{(L'H)}{=} -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ ez da puntu singularra.}$$

Beraz, ez da integral inpropioa.

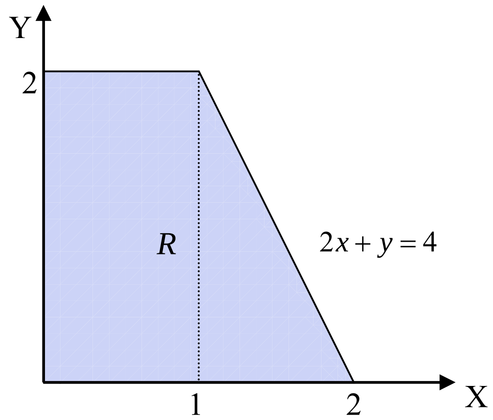
iii) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{1 - e^x} = \int_{-1}^{2} f(x) dx$ non $f(x) = \frac{1}{1 - e^x} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-1, 2] - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 0 \text{ puntu singularra da.}$$

Integral inpropioa da, eta deskonposatu behar dugu bere kalkulurako:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{1 - e^x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{1 - e^x} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{1 - e^x}$$

**2.- Izan bedi XY planoko *R* eskualdea:**




a) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, *R* eskualdearen azalera ematen duen integral mugatua.**

b) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OX ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena ematen duen integral mugatua.**

c) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OY ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena ematen duen integral mugatua.**

**(3 puntu)**

a) Azalera($R$) $= \int_0^2 \frac{4-y}{2}\,dy = \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 (4-2x)\,dx$

b) Bolumena(OX) $= \int_0^2 2\pi y \cdot \frac{4-y}{2}\,dy = \int_0^1 4\pi\,dx + \int_1^2 \pi(4-2x)^2\,dx$

c) Bolumena(OY) $= \int_0^2 \pi\left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy = \int_0^1 2\pi x \cdot 2\,dx + \int_1^2 2\pi x(4-2x)\,dx$

KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 3 (D eredua)

| |
|---|
| IZEN-ABIZENAK: |
| TALDEA: |

**1.- Hurrengo hiru integraletarako, erantzun bi galdera hauek:**

**a) Integral inpropioak dira? Baiezko kasuan, identifikatu bere puntu singularrak.**

**b) Bere kalkulu zuzenerako, deskonposatu behar dira? Baiezko kasuan, adieraz ezazu deskonposaketa hori. <u>Ez dituzu integralak kalkulatu behar</u>.**

**i)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\, dx$ **ii)** $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin x} dx$ **iii)** $\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{\mathrm{L}x}$

**(3 puntu)**

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx$ non $f(x) = \tan x \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2}$ puntu singularra da.

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$ puntu singularra da.

Integral inpropioa da, eta deskonposatu behar dugu bere kalkulurako:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \tan x\, dx + \int_{0}^{\pi/2} \tan x\, dx$$

ii) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin x} dx = \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx$ non $f(x) = \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin x} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \frac{0}{0} \overset{(L'H)}{=} -\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$ puntu singularra da.

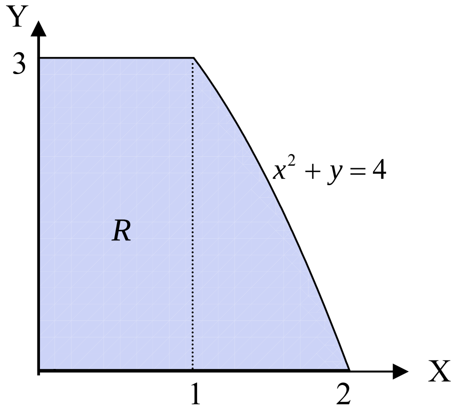
Integral inpropioa da, eta ez da beharrezkoa deskonposatzea bere kalkulurako.

iii) $\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{\mathrm{L}x} = \int_{0}^{1/2} f(x)\,dx$ non $f(x) = \frac{1}{\mathrm{L}x} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ez da puntu singularra.

Beraz, ez da integral inpropioa.

**2.- Izan bedi XY planoko *R* eskualdea:**




a) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, *R* eskualdearen azalera ematen duen integral mugatua.**

b) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OX ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena ematen duen integral mugatua.**

c) **Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OY ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena ematen duen integral mugatua.**

**(3 puntu)**

a) Azalera($R$) $= \int_0^3 \sqrt{4-y}\,dy = \int_0^1 3\,dx + \int_1^2 \left(4-x^2\right)dx$

b) Bolumena(OX) $= \int_0^3 2\pi y\sqrt{4-y}\,dy = \int_0^1 9\pi\,dx + \int_1^2 \pi\left(4-x^2\right)^2 dx$

c) Bolumena(OY) $= \int_0^2 \pi(4-y)\,dy = \int_0^1 2\pi x\cdot 3\,dx + \int_1^2 2\pi x\left(4-x^2\right)dx$