KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 3

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo integral mugagabeak:

a) $\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$

b) $\int \frac{\sin x}{\cos x+4}\,dx$

c) $\int x\sqrt{1-x^2}\;dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

(2 puntu)

a) $\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(x^2+4\right) - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(x^2+4\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + K$$

b) $\int \frac{\sin x}{\cos x+4}\,dx = -\mathrm{L}\left(\cos x+4\right) + K$

c) $\int x\sqrt{1-x^2}\;dx = -\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3} + K$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + K$

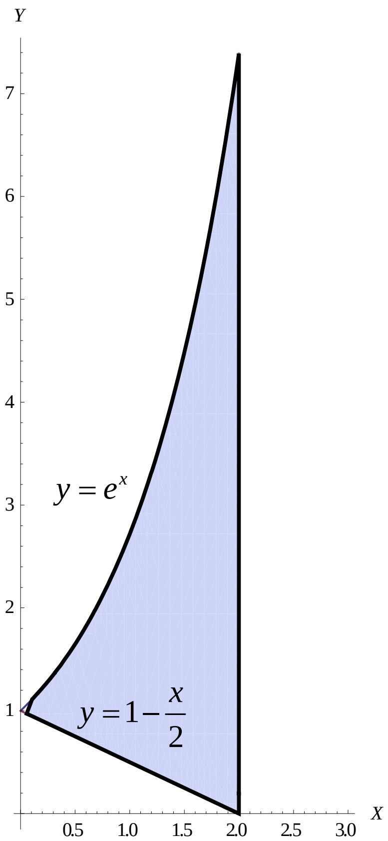
2.- $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 2,\, 1-\dfrac{x}{2}\le y\le e^x\right\}$ **eskualdea emanik,**

a) Kalkulatu, integral mugaturen bitartez, *R* eskualdearen azalera.

b) Planteatu, integral mugaturen bitartez, kalkulatu barik, OX ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena.

c) Planteatu, integral mugaturen bitartez, kalkulatu barik, OY ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena.

(1.5 puntu)



a) $\text{Azalera }(R)=\displaystyle\int_0^2\left(e^x-\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)dx=\int_0^2\left(e^x-1+\frac{x}{2}\right)dx=$

$$=\left(e^x-x+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^2=e^2-2+1-1=e^2-2$$

b) $\text{Bolumena }(oxR)=\pi\displaystyle\int_0^2\left(\left(e^x\right)^2-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\right)dx=$

$$=\pi\int_0^2\left(e^{2x}-1+x-\frac{x^2}{4}\right)dx$$

c) $\text{Bolumena }(oyR)=2\pi\displaystyle\int_0^2 x\left(e^x-\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)dx=$

$$=2\pi\int_0^2 x\left(e^x-1+\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^2\left(x\cdot e^x-x+\frac{x^2}{2}\right)dx$$

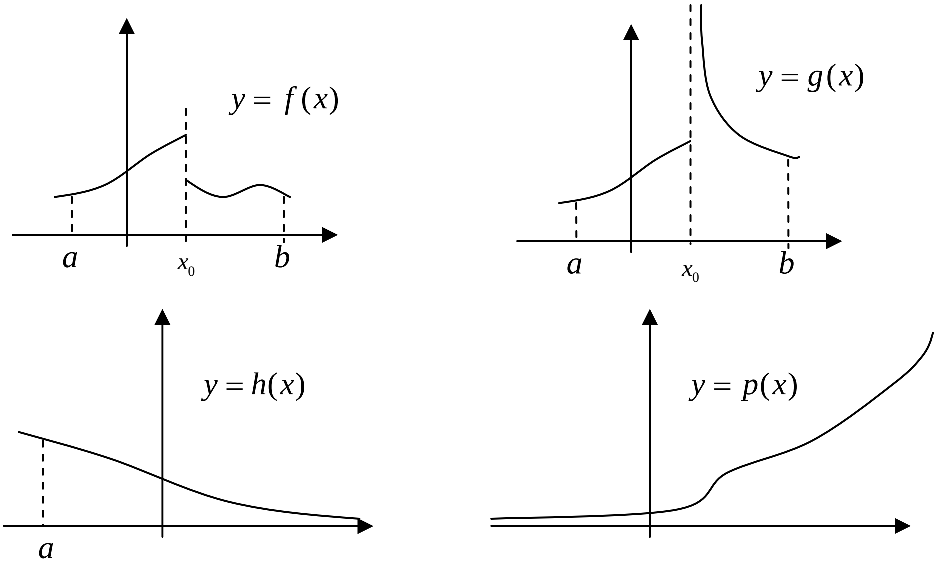
OHARRA: aurrekoa beharrean, planteamenduak *y* aldagaiaren mende ere egin daitezke (desegokiagoa bada ere)

$$\text{Azalera }(R)=\int_0^{e^2}2dy-\int_0^1(2-2y)dy-\int_1^{e^2}\mathrm{L}y\,dy$$

$$\text{Bolumena }(oxR)=2\pi\int_0^{e^2}2y\,dy-2\pi\int_0^1 y(2-2y)dy-2\pi\int_1^{e^2}y\,\mathrm{L}y\,dy=$$

$$\text{Bolumena }(oyR)=\pi\int_0^{e^2}4dy-\pi\int_0^1(2-2y)^2dy-\int_1^{e^2}\left(\mathrm{L}y\right)^2dy$$

3.- Hurrengo marrazkietan 4 funtzioren adierazpide grafikoak erakusten dira:



Grafikoen arabera, erantzun hurrengo galderak:

a) $\int_a^b f(x)dx$ **eta** $\int_a^b g(x)dx$ **integral inpropioak dira? Baiezko kasuan, adierazi zeintzuk diren puntu singularrak eta zergatik.**

b) $\int_a^\infty h(x)dx$ **eta** $\int_{-\infty}^\infty p(x)dx$ **integral inpropioetatik, bat ezin da konbergentea izan. Zein? Zergatik?**

(Puntu 1)

a) $\int_a^b f(x)dx$ ez da integral inpropioa $y = f(x)$ funtzio mugatua da integrazio tarte finituan.

$\int_a^b g(x)dx$ integral inpropioa da $y = g(x)$ mugatuta ez baitago integrazio tartean. Izan ere, $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x_0$ puntu singularra da.

b) $\int_{-\infty}^\infty p(x)dx$ integral inpropioa ezin da konbergentea izan ez baitu betetzen konbergentzi baldintza beharrezkoa. Grafikoaren arabera, $\lim_{x \to \infty} p(x) \neq 0$

4.- Kalkulatu $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

(0.5 puntu)

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

non $f(x) = \frac{1}{x^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-1,1] - \{0\}$ eta $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ puntu singularra da.

Beraz, integralaren kalkulurako, integrazio tartea bitan banandu behar dugu:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = I_1 + I_2$$

Eta I konbergentea da $\Leftrightarrow$ I_1 eta I_1 konbergenteak dira

$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0} = -\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} + \frac{1}{(-1)} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1$ dibergentea da $\quad \Rightarrow \quad I$ dibergentea da.

Eta $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \infty$