KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 3 (A eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo integral mugagabeak:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$

b) $\displaystyle\int \frac{\tan x+1}{\cos^2 x}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$

(2 puntu)

a) Frakzio sinpleen metodoa erabiliz:

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+(C-B)x+A-C}{(x-1)\left(x^2+1\right)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\C-B=0\\A-C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=-\dfrac{1}{2}\\C=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\mathrm{L}|x-1|-\frac{1}{4}\mathrm{L}\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\arctan x+k$$

b) $\displaystyle\int\frac{\tan x+1}{\cos^2 x}dx\overset{(*)}{=}\frac{\left(\tan x+1\right)^2}{2}+k$ (*) $\displaystyle\left(\tan x+1\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=\arcsin(x-3)+k$

2.- $\int_0^\infty \frac{dx}{(3-x)^2}$ **integrala emanik, adieraz ezazu inpropioa den (puntu singularrak zehaztuz), eta kalkulatu.**

(1.5 puntu)

$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(3-x)^2} = \int_0^\infty f(x)dx$ non $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,\infty) - \{3\}$

Eta $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$.

Beraz, integral inpropio honek bi puntu singular ditu, ∞ eta $x = 3$. Orduan:

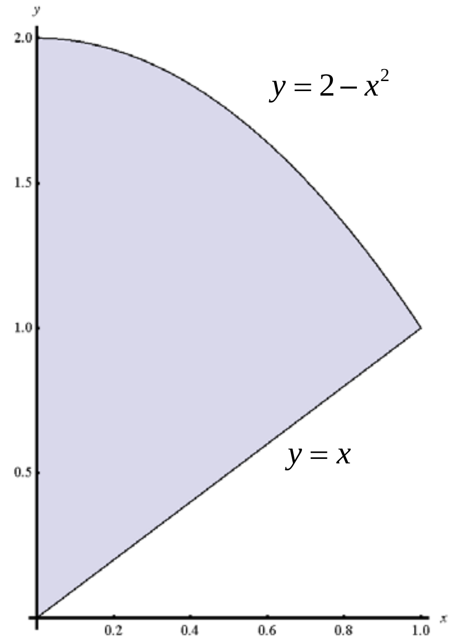
$$I = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^\infty f(x)dx = I_1 + I_2 + I_3$$

Eta I konbergentea da $\Leftrightarrow$ I_1, I_2, I_3 konbergenteak dira.

$I_1 = \int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^2} = \left.\frac{1}{3-x}\right|_0^3 = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1$ dibergentea da.

Beraz, I ere dibergentea da. $I = \infty$.

3.- Izan bedi marrazkian erakusten den planoko *R* eskualdea:



a) Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, *R* eskualdearen azalera, integral mugatuen bitartez.

b) Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OX ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena, integral mugatuen bitartez.

c) Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OY ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena, integral mugatuen bitartez.

(1.5 puntu)

a) Azalera(R) $= \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) dx = \int_0^1 y\,dy + \int_1^2 \sqrt{2-y}\, dy$

b) Bolumena(OX) $= \int_0^1 \pi \left[\left(2 - x^2\right)^2 - x^2 \right] dx = \int_0^1 2\pi y^2 dy + \int_1^2 2\pi y \sqrt{2-y}\, dy$

c) Bolumena(OY) $= \int_0^1 2\pi x \left(2 - x^2 - x\right) dx = \int_0^1 \pi y^2 dy + \int_1^2 \pi (2-y)\, dy$

KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 3 (B eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo integral mugagabeak:

a) $\int \frac{dx}{x\left(x^2+4\right)}$

b) $\int \frac{dx}{\left(\tan x+1\right)\cdot\cos^2 x}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(2 puntu)

a) Frakzio sinpleen metodoa erabiliz:

$$\frac{1}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x\left(x^2+4\right)} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 4A=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{4}\mathrm{L}\left|x\right|-\frac{1}{8}\mathrm{L}\left(x^2+4\right)+k$$

b) $\int \frac{dx}{\left(\tan x+1\right)\cdot\cos^2 x}\overset{(*)}{=}\mathrm{L}\left|\tan x+1\right|+k$ $\qquad$ (*) $\left(\tan x+1\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\arcsin(x-1)+k$

2.- $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(1-x)^2}$ **integrala emanik, adieraz ezazu inpropioa den (puntu singularrak zehaztuz), eta kalkulatu.**

(1.5 puntu)

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{(1-x)^2} = \int_{-2}^{2} f(x)dx \quad \text{non} \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-1,2]-\{1\}$$

Eta $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

Beraz, integral inpropio honek puntu singular bakarra du, $x = 1$. Orduan:

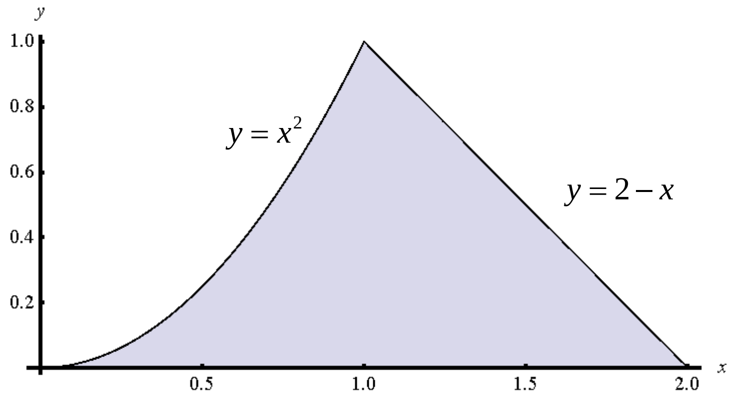
$$I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = I_1 + I_2$$

Eta I konbergentea da $\Leftrightarrow$ I_1, I_2 konbergenteak dira.

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x)^2} = \left.\frac{1}{1-x}\right|_{-1}^{1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1 \text{ dibergentea da.}$$

Beraz, I ere dibergentea da. $I = \infty$.

3.- Izan bedi marrazkian erakusten den planoko *R* eskualdea:



a) Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, *R* eskualdearen azalera, integral mugatuen bitartez.

b) Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OX ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena, integral mugatuen bitartez.

c) Planteatu, <u>kalkulatu barik</u>, OY ardatzaren inguruan biratzean *R* eskualdeak sortutako solidoaren bolumena, integral mugatuen bitartez.

(1.5 puntu)

a) Azalera(R) $= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \int_0^1 \left(2 - y - \sqrt{y}\right) dy$

b) Bolumena(OX) $= \int_0^1 \pi x^4\,dx + \int_1^2 \pi(2-x)^2\,dx = \int_0^1 2\pi y\left(2 - y - \sqrt{y}\right) dy$

c) Bolumena(OY) $= \int_0^1 2\pi x^3\,dx + \int_1^2 2\pi x(2-x)\,dx = \int_0^1 \pi\left((2-y)^2 - y\right) dy$