KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 2 (A eredua)

IZEN-ABIZENAK: TALDEA:

1.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}(1+x)}{e^x-1} & \forall x>0 \\ a & x=0 \\ 1-x+x^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \forall x<0 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Kalkulatu $a\in\mathbb{R}$, *f* jarraitua izan dadin $x=0$ puntuan.

b) Aurreko atalean lortutako *a* parametroaren balio horretarako, kalkulatu $f'(0)$.

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{L}(1+x)}{e^x-1}\sim\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\mathrm{L}\left(e^x\right)}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[1-x+x^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)=a\Leftrightarrow a=1$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow a=1$

b) $$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{\mathrm{L}(1+h)}{e^h-1}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{L}(1+h)-e^h+1}{h\cdot\left(e^h-1\right)}\sim$$

$$\sim\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{L}(1+h)-e^h+1}{h^2}\overset{(\mathrm{L'H})}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-e^h}{2h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-e^h-he^h}{2h(1+h)}\overset{(\mathrm{L'H})}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{-e^h-e^h-he^h}{2}=-1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-h+h^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\left(-1+h\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right)=-1$$

Beraz, $f'(0)=-1$

KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 2 (B eredua)

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $f(x)=\begin{cases} A\cdot e^{x}+x^{3}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \forall x<0 \\ \sqrt{1+x} & \forall x\geq 0 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Kalkulatu $A\in\mathbb{R}$, *f* jarraitua izan dadin $x=0$ puntuan.

b) Aurreko atalean lortutako *A* parametroaren balio horretarako, kalkulatu $f'(0)$.

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}\sqrt{1+x}=1 \\ \lim_{x\to 0^{-}} f(x)=\lim_{x\to 0^{-}}\left[A\cdot e^{x}+x^{3}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=A \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=A=1=f(0)\Leftrightarrow A=1$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow A=1$

b) $f'(0^{+})=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\sim\lim_{h\to 0^{+}}\frac{\mathrm{L}\left(\sqrt{1+h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{L}(1+h)}{h}=\frac{1}{2}$

$$f'(0^{-})=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{e^{h}+h^{3}\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)-1}{h}\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to 0^{-}}\left[e^{h}+3h^{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)-h\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right)\right]=1$$

Beraz, $\nexists f'(0)$

KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 2 (D eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA:

1.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{L(1+4x^2)}{x^2} & \forall x<0 \\ a & x=0 \\ 2(2+x)+x^2\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \forall x>0 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

- **a)** **Kalkulatu $a\in\mathbb{R}$, *f* jarraitua izan dadin $x=0$ puntuan.**
- **b)** **Aurreko atalean lortutako *a* parametroaren balio horretarako, kalkulatu $f'(0)$.**

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left[2(2+x)+x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=4 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{L(1+4x^2)}{x^2}\sim\lim_{x\to 0^-}\frac{4x^2}{x^2}=4 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=4=f(0)=a\Leftrightarrow a=4$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow a=4$

b) $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2(2+h)+h^2\cdot\cos\left(\dfrac{1}{h}\right)-4}{h}=2$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{L(1+4h^2)}{h^2}-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{L(1+4h^2)-4h^2}{h^3}\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{8h}{1+4h^2}-8h}{3h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-32h^2}{3h\left(1+4h^2\right)}=0$$

Beraz, $\nexists f'(0)$

KALKULUA – MINTEGIETAKO KONTROL 1 (E eredua)

IZEN-ABIZENAK: TALDEA:

1.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \forall x>0 \\ A & x=0 \\ B+x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \forall x<0 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

c) Kalkulatu $A\in\mathbb{R}$ eta $B\in\mathbb{R}$, *f* jarraitua izan dadin $x=0$ puntuan.

d) Aurreko atalean lortutako *A* eta *B* parametroen balio horietarako, kalkulatu $f'(0)$.

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\sim\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{L}\left(\sqrt{1+x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{L}(1+x)}{2x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(B+x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=B \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}=B=f(0)=A$$

$$\Leftrightarrow A=B=\frac{1}{2}$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow A=B=\dfrac{1}{2}$

b) $$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}-\dfrac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+h}-2-h}{2h^2}\overset{(\mathrm{L'H})}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}-1}{4h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1+h}}{4h\sqrt{1+h}}\sim\lim_{h\to 0^+}\frac{-\mathrm{L}\left(\sqrt{1+h}\right)}{4h}=-\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{L}(1+h)}{8h}=-\frac{1}{8}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{1}{2}+h\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)-\dfrac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\sin\left(\frac{1}{h}\right)\Rightarrow \nexists f'(0^-)$$

Beraz, $\nexists f'(0)$