KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 3 (A eredua)

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1

1.- Adierazi hurrengo integralak inpropioak diren ala ez. Integral inpropioa izatekotan, zehaztu bere puntu singular guztiak:

a) $\displaystyle\int_1^{\pi} \frac{\sin x \cdot \mathrm{L}x}{e^x - e} dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\mathrm{L}x}$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(x-1)(x^2+x)} dx$

(1.5 puntu)

a) $\displaystyle\int_1^{\pi} f(x)dx$ non $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \mathrm{L}x}{e^x - e} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (1, \pi]$

$\nexists f(1) \in \mathbb{R}$ baina $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) \sim \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin 1 \cdot (x-1)}{e^x - e} \overset{L'H}{=} \sin 1 \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{e^x} = \frac{\sin 1}{e} \quad \Rightarrow \quad x = 1$ ez da puntu singularra.

Beraz, ez da integral inpropioa.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ non $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{L}x} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (0, \infty) - \{1\}$

∞ puntu singularra da

$\nexists f(0) \in \mathbb{R}$ eta $\nexists f(1) \in \mathbb{R}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ez da puntu singularra.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ puntu singularra da.}$$

Integral inpropioa da.

c) $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ non $f(x)=\dfrac{\arctan x}{(x-1)(x^2+x)} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (0,\infty)-\{1\}$

∞ puntu singularra da

$\nexists f(0) \in \mathbb{R}$ eta $\nexists f(1) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{(x-1)x(x+1)} \sim \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{-x} = -1 \quad \Rightarrow \quad x=0 \text{ ez da puntu singularra.}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \sim \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4}}{(x-1)2} = \frac{\pi}{8} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ puntu singularra da.}$$

Integral inpropioa da.

2.- Izan bitez $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eta $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jarraituak diren bi funtzio. Adierazi, arrazoituz, hurrengo emaitzak zuzenak izan daitezkeen:

a) $\int_1^2 g(x)dx = 3x$

b) $\int_1^\infty g(x)dx = 3$

c) $\int_1^\infty f(x,t)dt = 3x$

d) $\int_1^\infty f(x,t)dx = 3x$

(Puntu 1)

a) Ezinezkoa da. $\int_1^2 g(x)dx = ktea.$

b) Izan daiteke. $\int_1^\infty g(x)dx$ integral inpropio konbergentea litzateke kasu horretan.

c) Izan daiteke. $\int_1^\infty f(x,t)dt$ x parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

d) Ezinezkoa da. $\int_1^\infty f(x,t)dx$ t parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

3.- $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$ **integrala emanik:**

a) Aztertu inpropioa ote den, eta adierazi, dagokionean, bere puntu singularrak.

b) Kalkulatu

(1.5 puntu)

a) $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$ non $\displaystyle f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\in\mathbb{R} \quad \forall x\in(0,4)$

$\nexists f(0)\in\mathbb{R}$ eta $\nexists f(4)\in\mathbb{R}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty \quad\Rightarrow\quad x=0$ puntu singularra da.

$\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x)=\infty \quad\Rightarrow\quad x=4$ puntu singularra da.

Beraz, integral inpropioa da.

b) $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^4 f(x)dx$ non $0<a<4$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}=\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+K$$

Orduan:

$$\int_0^4 f(x)dx=\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\Bigg|_0^a+\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\Bigg|_a^4=$$

$$=\arcsin\left(\frac{a-2}{2}\right)-\arcsin(-1)+\arcsin(1)-\arcsin\left(\frac{a-2}{2}\right)=$$

$$=-\arcsin(-1)+\arcsin(1)=2\arcsin(1)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

4.- a) Kalkulatu $F(a)=\int_0^1 \tan(ax)dx \quad \forall a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

b) Aurreko emaitzatik abiatuz, eta deribazio parametrikoa erabiliz, kalkulatu $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}dx$

(2 puntu)

a) $F(a)=\int_0^1 \tan(ax)dx=-\left.\frac{\mathrm{L}(\cos(ax))}{a}\right|_0^1=-\frac{\mathrm{L}(\cos(a))}{a} \quad \forall a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

b) Aurreko emaitza *a* parametroarekiko deribatuz:

$$F'(a)=\int_0^1 \frac{x}{\cos^2(ax)}dx=\frac{a\cdot\tan(a)+\mathrm{L}(\cos(a))}{a^2} \quad \forall a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Eta $a=\frac{\pi}{4}$ baliorako:

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^1 \frac{x}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}dx=\frac{\frac{\pi}{4}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{L}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{\frac{\pi}{4}+\mathrm{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{4}{\pi}-\frac{8}{\pi^2}\mathrm{L}2$$

KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 3 (B eredua)

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1

1.- Adierazi hurrengo integralak inpropioak diren ala ez. Integral inpropioa izatekotan, zehaztu bere puntu singular guztiak:

a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

b) $\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x - \sin x}$

c) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{(2x^2 - x)} dx$

(1.5 puntu)

a) $\int_0^1 f(x)dx$ non $f(x) = \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (0,1]$

$\nexists f(0) \in \mathbb{R}$ baina $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ez da puntu singularra.

Beraz, ez da integral inpropioa.

b) $\int_1^\pi f(x)dx$ non $f(x) = \frac{1}{\cos x - \sin x} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0, \pi] - \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$

$\nexists f\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}$ eta $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \infty \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$ puntu singularra da

Integral inpropioa da.

c) $\int_0^1 f(x)\,dx \quad f(x)=\dfrac{\arcsin x}{(2x^2-x)}\in\mathbb{R} \quad \forall x\in(0,1]-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$\nexists f(0)\in\mathbb{R}$ eta $\nexists f\left(\dfrac{1}{2}\right)\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\arcsin x}{(2x-1)x}\sim\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{-x}=-1 \quad\Rightarrow\quad x=0$ ez da puntu singularra.

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)\sim\lim_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}(2x-1)}=-\dfrac{2\pi}{6}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2x-1} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\infty\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{1}{2}$ puntu singularra da.

Integral inpropioa da.

2.- Izan bitez $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eta $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jarraituak diren bi funtzio. Adierazi, arrazoituz, hurrengo emaitzak zuzenak izan daitezkeen:

a) $\int_1^\infty g(x)dx = \infty$

b) $\int_0^4 g(t)dx = 3x$

c) $\int_1^\infty f(x,t)dt = 3t$

d) $\int_1^\infty f(x,t)dx = 3t$

(Puntu 1)

a) Izan daiteke. $\int_1^\infty g(x)dx$ integral inpropio dibergentea litzateke kasu horretan

b) Ezinezkoa da. $\int_0^4 g(t)dx$ t parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

c) Ezinezkoa da. $\int_1^\infty f(x,t)dt$ x parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

d) Izan daiteke. $\int_1^\infty f(x,t)dx$ t parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

3.- $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ **integrala emanik:**

a) Aztertu inpropioa ote den, eta adierazi, dagokionean, bere puntu singularrak.

b) Kalkulatu

(1.5 puntu)

a) $\int_2^4 f(x)dx$ non $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (2,4)$

$\nexists f(2) \in \mathbb{R}$ eta $\nexists f(4) \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad x=2$ puntu singularra da.

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad x=4$ puntu singularra da.

Beraz, integral inpropioa da.

b) $\int_2^4 f(x)dx = \int_2^a f(x)dx + \int_a^4 f(x)dx$ non $2<a<4$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \arcsin(x-3)+K$$

Orduan:

$$\int_2^4 f(x)dx = \arcsin(x-3)\Big|_2^a + \arcsin(x-3)\Big|_a^4 =$$

$$= \arcsin(a-3)-\arcsin(-1)+\arcsin(1)-\arcsin(a-3)=$$

$$= -\arcsin(-1)+\arcsin(1) = 2\arcsin(1) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

4.- a) Kalkulatu $I(a)=\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} \quad \forall a>0$

b) Aurreko emaitzatik abiatuz, eta deribazio parametrikoa erabiliz, kalkulatu $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(2 puntu)

a) $I(a)=\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a}=\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad \forall a>0$

b) Aurreko emaitza *a* parametroarekiko deribatuz:

$$I'(a)=\int_0^\infty -\frac{dx}{\left(x^2+a\right)^2}=-\frac{\pi}{4a^{3/2}} \quad \forall a>0$$

Eta deribazio parametrikoa errepikatuz:

$$I''(a)=\int_0^\infty \frac{2}{\left(x^2+a\right)^3}dx=\frac{3\pi}{8a^{5/2}} \quad \forall a>0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^3}=\frac{3\pi}{16a^{5/2}} \quad \forall a>0$$

Eta $a=1$ baliorako:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{3\pi}{16}$$

KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 3 (D eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA:

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1

1.- Adierazi hurrengo integralak inpropioak diren ala ez. Integral inpropioa izatekotan, zehaztu bere puntu singular guztiak:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{L}x}{x^2-1}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$

(1.5 puntu)

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ non $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}x}{x^2-1}\in\mathbb{R}\quad \forall x\in(0,1)$

$\nexists f(0)\in\mathbb{R}$ eta $\nexists f(1)\in\mathbb{R}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ puntu singularra da.

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)\sim \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x=1$ ez da puntu singularra.

Integral inpropioa da.

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ non $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{e^x-1}}\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\left(0,1\right]$

$\nexists f(0)\in\mathbb{R}$ eta $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)\sim \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{\mathrm{L}\left(e^x\right)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ ez da puntu singularra.

Beraz, ez da integral inpropioa.

c) $\int_{-1}^{\infty} f(x)dx$ non $f(x)=\dfrac{\arctan x}{x^2}\in\mathbb{R} \quad \forall x\in[-1,\infty)-\{0\}$

∞ puntu singularra da

$\nexists f(0)\in\mathbb{R}$ eta $\lim_{x\to 0} f(x)\sim\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ $x=0$ puntu singularra da.

Integral inpropioa da.

2.- Izan bitez $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eta $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jarraituak diren bi funtzio. Adierazi, arrazoituz, hurrengo emaitzak zuzenak izan daitezkeen:

a) $\int_{-1}^{1} f(t)dx = 3x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c) $\int_{1}^{\infty} g(x,t)dt = 3(x+t)$

d) $\int_{0}^{\infty} g(x,t)dx = t$

(Puntu 1)

a) Ezinezkoa da. $\int_{-1}^{1} f(t)dx$ t parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

b) Izan daiteke. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integral inpropio konbergentea litzateke.

c) Ezinezkoa da. $\int_{1}^{\infty} g(x,t)dt$ x parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

d) Izan daiteke. $\int_{0}^{\infty} g(x,t)dx$ t parametroaren mende definituriko integral parametrikoa da.

3.- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^2}$ **integrala emanik:**

a) Aztertu inpropioa ote den, eta adierazi, dagokionean, bere puntu singularrak.

b) Kalkulatu.

(1.5 puntu)

a) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ non $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (1,\infty) - \{3\}$

∞ puntu singularra da.

$\nexists f(3) \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 3$ puntu singularra da.

Beraz, integral inpropioa da.

b) $\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{3} f(x)dx + \int_3^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx = I_1 + I_2 + I_3$, non $1 < a < 3$.

$$\int \frac{1}{(x-3)^2} dx = -\frac{1}{x-3} + K$$

Orduan:

$\int_1^{3} f(x)dx = -\frac{1}{x-3}\Big|_1^3 = -\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} + \frac{1}{1-3} = \infty \quad \Rightarrow \quad I_1$ dibergentea da.

$\Rightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)dx$ dibergentea da $\qquad \Rightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$

4.- a) Kalkulatu $J(a)=\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx \quad \forall a>0$

b) Aurreko emaitzatik abiatuz, eta deribazio parametrikoa erabiliz, kalkulatu $\int_{-\infty}^{0} x^9\cdot e^x dx$

(2 puntu)

a) $J(a)=\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx=\left.\frac{e^{ax}}{a}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{a} \quad \forall a>0$

b) Aurreko emaitza *a* parametroarekiko deribatuz:

$$J'(a)=\int_{-\infty}^{0} xe^{ax}dx=-\frac{1}{a^2} \quad \forall a>0$$

Deribazio parametrikoa errepikatuz:

$$J''(a)=\int_{-\infty}^{0} x^2e^{ax}dx=\frac{2}{a^3} \quad \forall a>0$$

Deribazio parametrikoa errepikatuz:

$$J'''(a)=\int_{-\infty}^{0} x^3e^{ax}dx=-\frac{2\cdot 3}{a^4} \quad \forall a>0$$

Eta horrela jarraituz gero:

$$J^{9)}(a)=\int_{-\infty}^{0} x^9e^{ax}dx=-\frac{9!}{a^{10}} \quad \forall a>0$$

Eta $a=1$ baliorako: $\int_{-\infty}^{0} x^9\cdot e^x dx=-9!$