KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 2

(A eredua)

1.- a) a_n **eta** b_n **gai orokorrak emanik, noiz esaten da baliokideak direla?**

b) Hurrengo gai orokorrak emanik:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad b_n = \tan\left(\frac{3}{n^2+1}\right) \quad c_n = \frac{n^2+1}{n^2} \quad d_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^3}\right) \quad e_n = 3^{\frac{1}{n+1}},$$

erantzun, arrazoituz, ondoko galdera hauek:

i. **Zeintzuk dira baliokideak?**

ii. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ eta $\{e_n\}$ **segiden artean, zeintzuk dira konbergenteak?**

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ **serieen artean, zeintzuk daukate izaera berdina?**

(2 puntu)

a) a_n eta b_n gai orokorrak baliokideak dira $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

b) i)

$$\left.\begin{array}{l} d_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^3}\right) \sim \frac{n+1}{n^3} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = a_n \\ b_n = \tan\left(\frac{3}{n^2+1}\right) \sim \frac{3}{n^2+1} \sim \frac{3}{n^2} \\ c_n = \frac{n^2+1}{n^2} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \\ e_n = 3^{\frac{1}{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 3^0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n \sim d_n \quad \text{eta} \quad c_n \sim e_n$$

ii) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ eta $\{e_n\}$ segida guztiak konbergenteak dira, denek limite finitua baitute.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ konbergenteak dira, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ seriearen izaera berekoak baitira (hirurak gai ez-negatiboen serieak dira, beraz konparaziozko irizpidea aplikatu ahal zaie).

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ ere gai ez-negatiboen serieak dira. Eta ez dutenez konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen, orduan dibergenteak dira.

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)}{n^2}$

(1.5 puntu)

$\{n^2\}$ segida hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz irizpidea (*) aplika daiteke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(2n)}{n^2} =$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(2n)-(n-1)-n-(n+1)-\ldots-(2n-2)}{n^2-(n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+(2n-1)-(n-1)}{2n-1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

3.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}$ **seriearen izaera.**

(1.5 puntu)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)\cdot(2n-1)} \geq 0 \quad \forall n$

D´Alembert irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+1)\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(2n+1)\cdot n^n} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dibergentea da.

4.- Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}(2+x)+\dfrac{2x}{1+x}$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

(2 puntu)

$$f(x)=\mathrm{L}(2+x)+\frac{2x}{1+x}=g(x)+h(x)$$

- $g(x)=\mathrm{L}(2+x) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad g'(x)=\frac{1}{2+x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{2^{n+1}} \quad \forall x\in(-2,2)$$

(*) $r=-\dfrac{x}{2}$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da. Konbergentea $\Leftrightarrow |r|=\left|-\dfrac{x}{2}\right|<1$

Eta integratuz emaitza hori:

$$g(x)-g(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)} \quad \forall x\in(-2,2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x)=\mathrm{L}2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)} \quad \forall x\in(-2,2)$$

$x=-2$ puntuan $\nexists g$

$$x=2 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists g \text{ jarraitua} \\ \mathrm{L}2+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \text{ konbergentea (Leibniz)} \Rightarrow \exists \text{batura jarraitua} \end{cases}$$

Beraz, $g(x)=\mathrm{L}2+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)} \quad \forall x\in\left(-2,2\right]$

- $h(x)=\dfrac{2x}{1+x} \overset{(**)}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2x\cdot(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{n+1} \quad \forall x\in(-1,1)$

(**) $r=-x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da. Konbergentea $\Leftrightarrow |r|=|-x|<1$

Eta orain lortutako garapen biak batuz (biak konbergenteak diren eremuan):

$$f(x)=\mathrm{L}(2+x)+\frac{2x}{1+x}=\mathrm{L}2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{n+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=\mathrm{L}2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(2+\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\right)\cdot x^{n+1} \quad \forall x(-1,1)$$

5.- a) Baldin *f* funtzioaren berretura-seriezko garapena $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(2n+1)\cdot x^{2n}$ bada, aurkitu $f''(0)$.

b) $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ funtzioa emanik, non $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^{n)}(x)=e^x(1+n+x)\quad \forall n=0,1,2,\dots$ ($f^{0)}(x)=f(x)$), lortu $p_2(x)$ ((McLaurin-en 2. mailako polinomioa) eta $r_2(x)$ (polinomio horri dagokion Lagrange-ren hondarra).

(2 puntu)

a) *f* funtzioaren berretura-seriezko garapena Taylor-en seriea da, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$ alegia.

Emandako garapenean $n=1$ baliorako bigarren mailako batugaia dugu. Eta Taylor-en seriearen bigarren mailako batugaiarekin konparatuz:

$$-3x^2=\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2\quad\Leftrightarrow\quad f''(0)=-3\cdot 2!=-6$$

b) $p_2(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2$

Orduan, $f^{n)}(x)=e^x(1+n+x)\ \ \forall n=0,1,2,\dots$ adierazpenez baliatuz:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=f^{0)}(0)=e^0=1\\ f'(0)=e^0\cdot 2=2\\ f''(0)=e^0\cdot 3=3\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad p_2(x)=1+2x+\frac{3}{2}x^2$$

Eta $r_2(x)=\frac{f'''(\theta x)}{3!}\cdot x^3=\frac{e^{\theta x}(4+\theta x)}{3!}\cdot x^3$

KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 2

(B eredua)

1.- a) a_n eta b_n gai orokorrak emanik, noiz esaten da baliokideak direla?

b) Hurrengo gai orokorrak emanik:

$$a_n = \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \quad b_n = \frac{5}{n^2+1} \quad c_n = \frac{n^2+1}{n^2+4n+2} \quad d_n = e^{\frac{2n}{n^3+1}} \quad e_n = \sin\left(\frac{2n-1}{2n^3+3}\right),$$

erantzun, arrazoituz, ondoko galdera hauek:

i. **Zeintzuk dira baliokideak?**
ii. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ eta $\{e_n\}$ **segiden artean, zeintzuk dira konbergenteak?**
iii. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ **serieen artean, zeintzuk daukate izaera berdina?**

(2 puntu)

a) a_n eta b_n gai orokorrak baliokideak dira $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

b) i)

$$\left.\begin{aligned}
a_n &= \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \\
b_n &= \frac{5}{n^2+1} \sim \frac{5}{n^2} \\
c_n &= \frac{n^2+1}{n^2+4n+2} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \\
d_n &= e^{\frac{2n}{n^3+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 3^0 = 1 \\
e_n &= \sin\left(\frac{2n-1}{2n^3+3}\right) \sim \frac{2n-1}{2n^3+3} \sim \frac{2n}{2n^3} = \frac{1}{n^2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a_n \sim e_n \quad \text{eta} \quad c_n \sim d_n$$

ii) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ eta $\{e_n\}$ segida guztiak konbergenteak dira, denek limite finitua baitute.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ konbergenteak dira, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ seriearen izaera berekoak baitira (hirurak gai ez-negatiboen serieak dira, beraz konparaziozko irizpidea aplikatu ahal zaie).

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ere gai ez-negatiboen serieak dira. Eta ez dutenez konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen, orduan dibergenteak dira.

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(2n+n)}{n^2}$

(1.5 puntu)

$\{n^2\}$ segida hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz irizpidea (*) aplika daiteke:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(2n+n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(3n)}{n^2}=$$

$$\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(3n)-(2n-2)-(2n-1)-(2n)-\ldots-(3n-3)}{n^2-(n-1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+(3n-1)+(3n-2)-(2n-2)-(2n-1)}{2n-1}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{2n}=\frac{5}{2}$$

3.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 3^n}$ **seriearen izaera.**

(1.5 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{non} \quad a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 3^n} \geq 0 \quad \forall n$$

D´Alembert irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^2 \cdot 3^n}{(2n)!} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4}{3} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dibergentea da.

4.- Aurkitu $f(x) = x \cdot e^x + \mathrm{L}(3+x)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

(2 puntu)

$$f(x) = x \cdot e^x + \mathrm{L}(3+x) = g(x) + h(x)$$

- $g(x) = x \cdot e^x = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $h(x) = \mathrm{L}(3+x) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{3+x} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{3}} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{x}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{3^{n+1}} \quad \forall x \in (-3,3)$$

(*) $r = -\frac{x}{3}$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da. Konbergentea $\Leftrightarrow |r| = \left| -\frac{x}{3} \right| < 1$

Eta integratuz emaitza hori:

$$h(x) - h(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} \quad \forall x \in (-3,3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad h(x) = \mathrm{L}3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} \quad \forall x \in (-3,3)$$

$x = -3$ puntuan $\nexists h$

$$x = 3 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists h \text{ jarraitua} \\ \mathrm{L}3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea (Leibniz)} \Rightarrow \exists \text{batura jarraitua} \end{cases}$$

Beraz, $h(x) = \mathrm{L}3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} \quad \forall x \in \left(-3,3\right]$

Eta orain lortutako garapen biak batuz (biak konbergenteak diren eremuan):

$$f(x) = x \cdot e^x + \mathrm{L}(3+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} + \mathrm{L}3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} \quad \forall x \in \left(-3,3\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = \mathrm{L}3 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1} \cdot (n+1)} + \frac{1}{n!} \right) \cdot x^{n+1} \quad \forall x \in \left(-3,3\right]$$

5.- a) Baldin f funtzioaren berretura-seriezko garapena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$ bada, aurkitu $f^{4)}(0)$.

b) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ funtzioa emanik, non $\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{n)}(x) = e^x (n+x)$ $\forall n = 0,1,2,\dots$ ($f^{0)}(x) = f(x)$), lortu $p_2(x)$ ((McLaurin-en 2. mailako polinomioa) eta $r_2(x)$ (polinomio horri dagokion Lagrange-ren hondarra).

(2 puntu)

a) f funtzioaren berretura-seriezko garapena Taylor-en seriea da, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ alegia.

Emandako garapenean $n = 4$ baliorako laugarren mailako batugaia dugu. Eta Taylor-en seriearen laugarren mailako batugaiarekin konparatuz:

$$-\frac{x^4}{4} = \frac{f^{4)}(0)}{4!} \cdot x^4 \quad \Leftrightarrow \quad f^{4)}(0) = -\frac{4!}{4} = -6$$

b) $p_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2$

Orduan, $f^{n)}(x) = e^x (n+x)$ $\forall n = 0,1,2,\dots$ adierazpenez baliatuz:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= f^{0)}(0) = e^0 \cdot 0 = 0 \\ f'(0) &= e^0 \cdot 1 = 1 \\ f''(0) &= e^0 \cdot 2 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad p_2(x) = x + x^2$$

Eta $r_2(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!} \cdot x^3 = \frac{e^{\theta x}(3+\theta x)}{3!} \cdot x^3$

KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 2

(C eredua)

1.- a) a_n **eta** b_n **gai orokorrak emanik, noiz esaten da baliokideak direla?**

b) Hurrengo gai orokorrak emanik:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad b_n = 2^{\frac{1}{2n+1}} \quad c_n = \tan\left(\frac{3n+1}{3n^3}\right) \quad d_n = \frac{2n^2-1}{2n^2} \quad e_n = \sin\left(\frac{4n}{n^3+1}\right),$$

erantzun, arrazoituz, ondoko galdera hauek:

i. **Zeintzuk dira baliokideak?**

ii. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ eta $\{e_n\}$ **segiden artean, zeintzuk dira konbergenteak?**

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ **serieen artean, zeintzuk daukate izaera berdina?**

(2 puntu)

a) a_n eta b_n gai orokorrak baliokideak dira $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

b) i)

$$\left.\begin{array}{l} c_n = \tan\left(\frac{3n+1}{3n^3}\right) \sim \frac{3n+1}{3n^3} \sim \frac{3n}{3n^3} = \frac{1}{n^2} = a_n \\ b_n = 2^{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 2^0 = 1 \\ d_n = \frac{2n^2-1}{2n^2} \sim \frac{2n^2}{2n^2} = 1 \\ e_n = \sin\left(\frac{4n}{n^3+1}\right) \sim \frac{4n}{n^3+1} \sim \frac{4n}{n^3} = \frac{4}{n^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n \sim c_n \quad \text{eta} \quad b_n \sim d_n$$

ii) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ eta $\{e_n\}$ segida guztiak konbergenteak dira, denek limite finitua baitute.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ konbergenteak dira, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ seriearen izaera berekoak baitira (hirurak gai ez-negatiboen serieak dira, beraz konparaziozko irizpidea aplikatu ahal zaie).

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ere gai ez-negatiboen serieak dira. Eta ez dutenez konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen, orduan dibergenteak dira.

2.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(n+n+1)}{n^2}$

(1.5 puntu)

$\{n^2\}$ segida hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz irizpidea (*) aplika daiteke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(n+n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(2n+1)}{n^2} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(2n+1)-n-(n+1)-(n+2)-\ldots-(2n-1)}{n^2-(n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)+2n-n}{2n-1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

3.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3n}$ **seriearen izaera.**

(1.5 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{non} \quad a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3n} \geq 0 \quad \forall n$$

D´Alembert irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3n\cdot (3n+3)} \cdot \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{konbergentea da.}$$

4.- Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}(2-x)-\dfrac{3x}{1-x}$ **funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.**

(2 puntu)

$$f(x)=\mathrm{L}(2-x)-\frac{3x}{1-x}=g(x)+h(x)$$

- $g(x)=\mathrm{L}(2-x) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad g'(x)=\frac{-1}{2-x}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \quad \forall x\in(-2,2)$$

(*) $r=\dfrac{x}{2}$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da. Konbergentea $\Leftrightarrow |r|=\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$

Eta integratuz emaitza hori:

$$g(x)-g(0)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)} \quad \forall x\in(-2,2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x)=\mathrm{L}2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)} \quad \forall x\in(-2,2)$$

$x=2$ puntuan $\nexists g$

$$x=-2 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists g \text{ jarraitua} \\ \mathrm{L}2-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \text{ konbergentea (Leibniz)} \Rightarrow \exists \text{batura jarraitua} \end{cases}$$

Beraz, $g(x)=\mathrm{L}2-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)} \quad \forall x\in\left[-2,2\right)$

- $h(x)=\dfrac{3x}{1-x}\overset{(**)}{=}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3x\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3x^{n+1} \quad \forall x\in(-1,1)$

(**) $r=x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da. Konbergentea $\Leftrightarrow |r|=|x|<1$

Eta orain lortutako garapen biak batuz (biak konbergenteak diren eremuan):

$$f(x)=\mathrm{L}(2-x)-\frac{3x}{1-x}=\mathrm{L}2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}3x^{n+1} \quad \forall x(-1,1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=\mathrm{L}2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(3+\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\right)\cdot x^{n+1} \quad \forall x(-1,1)$$

5.- a) Baldin f funtzioaren berretura-seriezko garapena $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ bada, aurkitu $f'''(0)$.

b) $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ funtzioa emanik, non $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^{n)}(x)=e^{x+1}\cdot(n-1+x)\quad \forall n=0,1,2,\ldots$ ($f^{0)}(x)=f(x)$), lortu $p_2(x)$ ((McLaurin-en 2. mailako polinomioa) eta $r_2(x)$ (polinomio horri dagokion Lagrange-ren hondarra).

(2 puntu)

a) *f* funtzioaren berretura-seriezko garapena Taylor-en seriea da, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$ alegia.

Emandako garapenean $n=1$ baliorako hirugarren mailako batugaia dugu. Eta Taylor-en seriearen hirugarren mailako batugaiarekin konparatuz:

$$-\frac{x^3}{3}=\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 \quad\Leftrightarrow\quad f'''(0)=-\frac{3!}{3}=-2$$

b) $p_2(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2$

Orduan, $f^{n)}(x)=e^{x+1}\cdot(n-1+x)\;\;\forall n=0,1,2,\ldots$ adierazpenez baliatuz:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=f^{0)}(0)=e^1\cdot(-1)=-e \\ f'(0)=e^1\cdot 0=0 \\ f''(0)=e^1\cdot 1=e \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad p_2(x)=-e+\frac{e}{2}\cdot x^2$$

Eta $r_2(x)=\frac{f'''(\theta x)}{3!}\cdot x^3=\frac{e^{\theta x+1}(2+\theta x)}{3!}\cdot x^3$