KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 1 (A eredua)

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1

1.- Aurkitu $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|-1}}{1-\mathrm{L}x}$ **funtzioaren definizio-eremua**

(Puntu 1)

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-2|-1\geq 0, 1-\mathrm{L}x\neq 0, x>0\right\}$$

- $|x-2|-1\geq 0 \;\Leftrightarrow\; |x-2|\geq 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-2\geq 1 & \forall x\geq 2 \\ 2-x\geq 1 & \forall x<2 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x\geq 3 & \forall x\geq 2 \\ x\leq 1 & \forall x<2 \end{cases} \;\Rightarrow$

  $\Rightarrow \quad x\in(-\infty,1]\cup[3,\infty)$

- $1-\mathrm{L}x\neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{L}x\neq 1 \;\Leftrightarrow\; x\neq e$

- $x>0$

Orduan: $D=(0,1]\cup[3,\infty)$

<u>Oharra</u>:

Lehenengo baldintza honela ere adieraz daiteke:

$$|x-2|\geq 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-2\geq 1 \\ \text{edo} \\ x-2\leq -1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x\geq 3 \\ \text{edo} \\ x\leq 1 \end{cases}$$

Oro har, $\forall a>0 \quad |x|\leq a \;\Leftrightarrow\; -a\leq x\leq a$ eta $|x|\geq a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x\geq a \\ \text{edo} \\ x\leq -a \end{cases}$

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(Puntu 1)

$$\lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = 1^{\infty} = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\cdot \mathrm{L}(2-\cos x) \sim \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot(2-\cos x-1) = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2} \sim \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3.- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1+\sin x}{x} & \forall x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) **Aurkitu** $A\in\mathbb{R}$**,** ***f*** **jarraitua izan dadin.**

b) **Aurreko atalean lortutako** ***A*** **parametroaren balio horretarako, aztertu** ***f*****-ren deribagarritasuna eta kalkulatu bere deribatua.**

(2.5 puntu)

a) $\forall x\neq 0$ *f* jarraitua da (funtzio jarraituen konposaketa baita)

$x=0$ puntuan *f* jarraitua da $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=A$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\sin x}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left(e^x+\cos x\right)=2$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow A=2$

b) $\forall x\neq 0$ *f* deribagarria da (funtzio deribagarrien konposaketa baita) eta bere deribatua deribazio-erregelak erabiliz kalkula daiteke:

$$\forall x\neq 0 \quad f'(x)=\frac{(e^x+\cos x)x-(e^x-1+\sin x)}{x^2}$$

$x=0$ puntuan, berriz, definizioa erabili behar dugu deribatua kalkulatzeko:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{e^h-1+\sin h}{h}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1+\sin h-2h}{h^2}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\cos h-2}{2h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sin h}{2}=\frac{1}{2}$$

Beraz, $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(e^x+\cos x)x-(e^x-1+\sin x)}{x^2} & \forall x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & x=0\end{cases}$ eta $f'(x)\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Ondorioz, *f* deribagarria $\forall x\in\mathbb{R}$.

KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 1 (B eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA:

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1

1.- Aurkitu $f(x)=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\sqrt{|x|-1}}$ **funtzioaren definizio-eremua**

(Puntu 1)

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\le x-1\le 1, |x|-1>0\right\}$$

- $-1\le x-1\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0\le x\le 2$
- $|x|-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad |x|>1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>1 & \forall x\ge 0 \\ -x>1 & \forall x<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>1 & \forall x\ge 0 \\ x<-1 & \forall x<0 \end{cases} \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Orduan: $D=\left(1,2\right]$

<u>Oharra</u>:

Bigarren baldintza honela ere adieraz daiteke:

$$|x|>1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>1 \\ \text{edo} \\ x<-1 \end{cases}$$

Oro har, $\forall a>0 \quad |x|\le a \quad\Leftrightarrow\quad -a\le x\le a \qquad \text{eta} \qquad |x|\ge a \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\ge a \\ \text{edo} \\ x\le -a \end{cases}$

2.- Kalkulatu $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}}$

(Puntu 1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}} = 1^{\infty} = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot \mathrm{L}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\cos x+\sin x}{x} & \forall x\neq 0 \\ A & x=0 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Aurkitu $A\in\mathbb{R}$, *f* jarraitua izan dadin.

b) Aurreko atalean lortutako *A* parametroaren balio horretarako, aztertu *f*-ren deribagarritasuna eta kalkulatu bere deribatua.

(2.5 puntu)

a) $\forall x\neq 0$ *f* jarraitua da (funtzio jarraituen konposaketa baita)

$x=0$ puntuan *f* jarraitua da $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=A$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left(e^x+\sin x+\cos x\right)=2$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow A=2$

b) $\forall x\neq 0$ *f* deribagarria da (funtzio deribagarrien konposaketa baita) eta bere deribatua deribazio-erregelak erabiliz kalkula daiteke:

$$\forall x\neq 0 \quad f'(x)=\frac{(e^x+\sin x+\cos x)x-(e^x-\cos x+\sin x)}{x^2}$$

$x=0$ puntuan, berriz, definizioa erabili behar dugu deribatua kalkulatzeko:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{e^h-\cos h+\sin h}{h}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\cos h+\sin h-2h}{h^2}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\sin h+\cos h-2}{2h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\cos h-\sin h}{2}=1$$

Beraz, $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^x+\sin x+\cos x)x-(e^x-\cos x+\sin x)}{x^2} & \forall x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ eta $f'(x)\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Ondorioz, *f* deribagarria $\forall x\in\mathbb{R}$.

KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 1 (C eredua)

IZEN-ABIZENAK:
TALDEA:

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1

1.- Aurkitu $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-3|-1}}{1-\mathrm{L}x}$ **funtzioaren definizio-eremua**

(Puntu 1)

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-3|-1\geq 0, 1-\mathrm{L}x\neq 0, x>0\right\}$$

- $|x-3|-1\geq 0 \iff |x-3|\geq 1 \iff \begin{cases} x-3\geq 1 & \forall x\geq 3 \\ 3-x\geq 1 & \forall x<3 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 4 & \forall x\geq 3 \\ x\leq 2 & \forall x<3 \end{cases} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \quad x\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$
- $1-\mathrm{L}x\neq 0 \iff \mathrm{L}x\neq 1 \iff x\neq e$
- $x>0$

Orduan: $D=(0,2]\cup[4,\infty)$

<u>Oharra</u>:

Lehenengo baldintza honela ere adieraz daiteke:

$$|x-3|\geq 1 \iff \begin{cases} x-3\geq 1 \\ \text{edo} \\ x-3\leq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 4 \\ \text{edo} \\ x\leq 2 \end{cases}$$

Oro har, $\forall a>0 \quad |x|\leq a \iff -a\leq x\leq a$ eta $|x|\geq a \iff \begin{cases} x\geq a \\ \text{edo} \\ x\leq -a \end{cases}$

2.- Kalkulatu $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

(Puntu 1)

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}} = 1^{\infty} = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan^2 x}\cdot \mathrm{L}\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(1+\sin^2 x\right) \sim \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} \sim \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-2+\cos x}{x} & \forall x\neq 0 \\ A & x=0 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Aurkitu $A\in\mathbb{R}$, *f* jarraitua izan dadin.

b) Aurreko atalean lortutako *A* parametroaren balio horretarako, aztertu *f*-ren deribagarritasuna eta kalkulatu bere deribatua.

(2.5 puntu)

a) $\forall x\neq 0$ *f* jarraitua da (funtzio jarraituen konposaketa baita)

$x=0$ puntuan *f* jarraitua da $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=A$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2+\cos x}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left(e^x-\sin x\right)=1$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow A=1$

b) $\forall x\neq 0$ *f* deribagarria da (funtzio deribagarrien konposaketa baita) eta bere deribatua deribazio-erregelak erabiliz kalkula daiteke:

$$\forall x\neq 0 \quad f'(x)=\frac{(e^x-\sin x)x-(e^x-2+\cos x)}{x^2}$$

$x=0$ puntuan, berriz, definizioa erabili behar dugu deribatua kalkulatzeko:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{e^h-2+\cos h}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-2+\cos h-h}{h^2}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sin h-1}{2h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\cos h}{2}=0$$

Beraz, $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^x-\sin x)x-(e^x-2+\cos x)}{x^2} & \forall x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ eta $f'(x)\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Ondorioz, *f* deribagarria $\forall x\in\mathbb{R}$.

KALKULUA - IDATZIZKO FROGA 1 (D eredua)

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1

1.- Aurkitu $f(x)=\dfrac{\arcsin(x+1)}{\sqrt{1-|x|}}$ **funtzioaren definizio-eremua**

(Puntu 1)

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\le x+1\le 1, 1-|x|>0\right\}$$

- $-1\le x+1\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -2\le x\le 0$
- $1-|x|>0 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x<1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-1,1)$

Orduan: $D=(-1,0]$

<u>Oharra</u>:

Oro har, $\forall a>0 \quad |x|\le a \quad\Leftrightarrow\quad -a\le x\le a$ eta $|x|\ge a \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\ge a \\ \text{edo} \\ x\le -a \end{cases}$

2.- Kalkulatu $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

(Puntu 1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = 1^{\infty} = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \mathrm{L}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) \sim -\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad A = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

3.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2e^x-2+\sin x}{x} & \forall x\neq 0 \\ A & x=0 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) **Aurkitu** $A\in\mathbb{R}$ **,** ***f*** **jarraitua izan dadin.**

b) **Aurreko atalean lortutako** ***A*** **parametroaren balio horretarako, aztertu** ***f*****-ren deribagarritasuna eta kalkulatu bere deribatua.**

(2.5 puntu)

a) $\forall x\neq 0$ *f* jarraitua da (funtzio jarraituen konposaketa baita)

$x=0$ puntuan *f* jarraitua da $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=A$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2+\sin x}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left(2e^x+\cos x\right)=3$$

Beraz, *f* jarraitua da $x=0$ puntuan $\Leftrightarrow A=3$

b) $\forall x\neq 0$ *f* deribagarria da (funtzio deribagarrien konposaketa baita) eta bere deribatua deribazio-erregelak erabiliz kalkula daiteke:

$$\forall x\neq 0 \quad f'(x)=\frac{(2e^x+\cos x)x-(2e^x-2+\sin x)}{x^2}$$

$x=0$ puntuan, berriz, definizioa erabili behar dugu deribatua kalkulatzeko:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2e^h-2+\sin h}{h}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2e^h-2+\sin h-3h}{h^2}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{2e^h+\cos h-3}{2h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{2e^h-\sin h}{2}=1$$

Beraz, $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(2e^x+\cos x)x-(2e^x-2+\sin x)}{x^2} & \forall x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ eta $f'(x)\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Ondorioz, *f* deribagarria $\forall x\in\mathbb{R}$.