Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

OHARRA: Azterketako garapen eta emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

1.- a) Kalkulatu $P(x,y)=(1,0)$ puntuan, hurrengo funtzio diferentziagarriaren deribatu direkzional maximoaren balioa:

$$f(x,y)=\sin^3\left(y^2\right)+g\left(x\cdot e^{x^2}\right)+e^{g(e^y)}+\int_{2y+e}^{x^2} g(t)dt$$

jakinda $g(1)=g'(1)=0$ **eta** $g(e)=g'(e)=1$ **.**

b) Kalkulatu P puntuan f-ren deribatu direkzionala $(2,3e)$ bektorearen norabidean.

(2 puntu)

f diferentziagarria dela kontuan izanik:

a) *f* -ren deribatu direkzional maximoa bere gradientearen modulua da:

$$\begin{cases} f'_x=\left(e^{x^2}+2x^2\cdot e^{x^2}\right)\cdot g'\left(x\cdot e^{x^2}\right)+2x\cdot g\left(x^2\right) \\ f'_y=6y\cdot\sin^2\left(y^2\right)\cdot\cos\left(y^2\right)+e^y\cdot g'(e^y)\cdot e^{g(e^y)}-2\cdot g(2y+e) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(P)=3e\cdot g'(e)+2\cdot g(1)=3e \\ f'_y(P)=g'(1)\cdot e^{g(1)}-2\cdot g(e)=-2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\nabla f}(P)=(3e,-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{\nabla f}(P)\right|=\sqrt{9e^2+4}$$

b) $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P=\overrightarrow{\nabla f}(P)\cdot\vec{u}=f'_x(P)\cdot h_1+f'_y(P)\cdot h_2 \quad \forall\vec{u}=\left(h_1,h_2\right)$ unitarioa.

Kasu honetan $(2,3e)$ bektorea unitario bihurtu behar dugu: $\vec{u}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{4+9e^2}},\dfrac{3e}{\sqrt{4+9e^2}}\right)$.

Eta, honela, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P=0$.

OHARRA: Deribatua kalkulatu barik emaitza atera zezakeen, $(2,3e)\perp(3e,-2)=\overrightarrow{\nabla f}(P)$

2.- Izan bedi $\begin{cases} F(t,x,y) = x^2 + y + t^2 - 2 = 0 \\ G(t,x,y) = \sin(ty) - \cos(x-t) + 1 = 0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema.**

a) Egiaztatu ea $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ **funtzio inplizituak definitzen dituen** $P(t,x,y) = (1,1,0)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Izan bedi planoan definituriko $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ **kurba. Aurkitu** $A(x,y) = (2,3)$ **puntutik pasatzen den zuzena, *C* kurbari dagokion** $t = 1$ **puntuko zuzen ukitzailearekiko paraleloa delarik.**

(1.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz:

i. $\begin{cases} F(P) = 0 \\ F(P) = 0 \end{cases}$

ii. $\exists \begin{cases} F_t' = 2t \quad F_x' = 2x \quad F_y' = 1 \\ G_t' = y\cos(ty) - \sin(x-t) \quad G_x' = \sin(x-t) \quad G_y' = t\cos(ty) \end{cases}$ eta jarraituak dira $P(t,x,y) = (1,1,0)$ puntuaren ingurunean.

iii. $\left| \dfrac{D(F,G)}{D(x,y)} \right|_P = \begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Beraz, $P(t,x,y) = (1,1,0)$ puntuaren ingurunean $\exists! \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ diferentziagarria, $\begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ izanik.

b) $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ kurbaren bektore ukitzailea $t = 1$ puntuan $\left(x'(1), y'(1)\right)$ da. Emandako ekuazio-sisteman *t*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 2x \cdot x'(t) + y'(t) + 2t = 0 \\ (y + t \cdot y'(t)) \cdot \cos(ty) + (x'(t) - 1) \cdot \sin(x-t) = 0 \end{cases}$$

Eta $t = 1$ puntuan ordezkatuz, $x(1) = 1$ eta $y(1) = 0$ direla kontuan harturik:

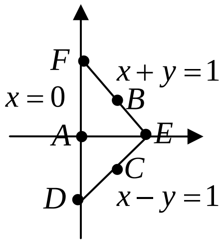
$$\begin{cases} 2 \cdot x'(1) + y'(1) + 2 = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x'(1) = -1$$

Beraz, bektore ukitzailea $\left(x'(1), y'(1)\right) = (-1,0)$ da. Orduan, $A(x,y) = (2,3)$ puntutik pasatzen den zuzena, bere norabide bektorea aurrekoa delarik, $y = 3$ zuzena da.

3.- Lortu $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ funtzioaren mutur absolutuak hurrengo multzoan:

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\ge 0\,,\ |x|+|y|\le 1\}$$

(1.5 puntu)



f funtzio jarraitua eta M multzo itxi eta mugatua denez, Weierstrass-en teoremak ziurtatzen digu f funtzioak bere balio maximo eta minimo absolutuak hartzen dituela multzo horretan.

- Hasiko gara f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen:

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x=2x-y=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=2x \\ f'_y=2y-x=0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad 4x-x=3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=0$$

Puntu kritiko bakarra dugu, $A=(0,0)\in M$

- Orain f-ren puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu. M-ren mugan daudenak, hain zuzen ere.

M-ren muga hiru zatiz osaturik dago:

(1) $x=0$ (non $-1\le y\le 1$). Orduan:

$$f(0,y)=y^2 \quad\Rightarrow\quad f'(y)=2y=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=0 \quad\Rightarrow\quad A=(0,0)$$

(2) $|x|+|y|=1 \quad \forall x\ge 0, y\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x+y=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=1-x$. Orduan:

$$f(x,1-x)=x^2-x(1-x)+(1-x)^2=3x^2-3x+1 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=6x-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad B=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

(3) $|x|+|y|=1 \quad \forall x\ge 0, y\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad x-y=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=x-1$. Orduan:

$$f(x,x-1)=x^2-x(x-1)+(x-1)^2=x^2-x+1 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad C=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Eta, aurrekoaz gain, mugako erpinak: $D=(0,-1)$, $E=(1,0)$ eta $F=(0,1)$.

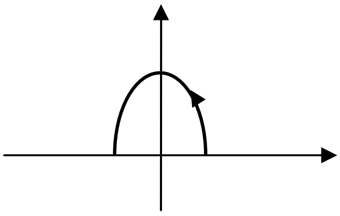
Lortutako puntu kritiko guztietan f-ren balioa kalkulatuz:

$$f(A)=0<f(B)=\frac{1}{4}<f(C)=\frac{3}{4}<f(D)=f(E)=f(F)=1$$

Beraz, A minimo absolutua eta D, E eta F maximo absolutuak dira.

4.- $\vec{F}(x,y)=(\sin x+\arctan y)\cdot\vec{i}+\left(\arctan y-2xy+\dfrac{x}{1+y^2}\right)\cdot\vec{j}$ **bektorea emanik, kalkulatu bere lerro-integrala** $C\equiv\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$**, non** $y>0$**, kurban zehar,** $A=(2,0)$ **puntutik** $B=(-2,0)$ **puntura.**

(1.75 puntu)



$\vec{F}$ bektorea ikusita, $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ zuzenean ebaztea konplikatuegia izan daitekeela ematen du.

Izan bedi, orduan, $C_1\equiv y=0\quad \forall x\in[-2,2]$ eta defini dezagun $C'\equiv C\bigcup C_1$ kurba itxia eta zatika leuna.

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira. Beraz, Green-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_{C'}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{R_{xy}}\left(Y'_x-X'_y\right)dxdy$$

$$\text{non}\begin{cases}X=\sin x+\arctan y \quad\Rightarrow\quad X'_y=\dfrac{1}{1+y^2}\\[2ex] Y=\arctan y-2xy+\dfrac{x}{1+y^2}\quad\Rightarrow\quad Y'_x=-2y+\dfrac{1}{1+y^2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\oint_{C'}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{R_{xy}}-2ydxdy\overset{(*)}{=}-36\int_0^{\pi}\int_0^1\rho^2\cdot\sin\theta\,d\rho\,d\theta=\frac{36}{3}\cdot\cos\theta\Big|_0^{\pi}=-24$$

$$(*)\ R_{xy}\equiv\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1\\ y>0\end{cases}$$

Polarretan adierazita: $\begin{cases}x=2\rho\cos\theta\\ y=3\rho\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\quad |J|=6\rho\quad$ eta $\quad R_{xy}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\ 0\le\rho\le 1\end{cases}$

Orain C_1 kurbaren gaineko lerro-integrala kalkulatuko dugu:

$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{-2}^{2}\sin x dx=-\cos x\Big|_{-2}^{2}=0$ ($\cos x$ funtzio bakoitia baita).

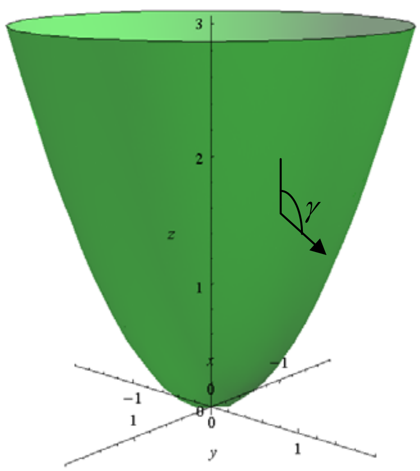
Beraz, $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{C'}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-24$

5.- a) Izan bedi S gainazala $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=3 \end{cases}$ kurbak mugaturiko $z=x^2+y^2$ gainazalaren zatia. Izan bedi $\vec{F}(x,y,z)=y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+xz\cdot\vec{k}$ bektorea. Kalkulatu $\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$, S gainazalaren kanpoko aurpegitik.

b) Kalkulatu aurreko S gainazalaren azalera.

(1.75 puntu)

a)



$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=(0,-z,0)$

$S \equiv z=x^2+y^2 \quad \forall (x,y)\in R_{xy}\equiv x^2+y^2\le 3$

$\vec{N}=(-2x,-2y,1)$

Eta $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$

<u>Hiru era ezberdinetan</u> egin daiteke:

(1) Zuzenean, emandako integrala ebatziz.

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}=\pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy=-\iint_{R_{xy}}2y\left(x^2+y^2\right)dxdy\overset{(*)}{=}$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\rho^4\cdot\sin\theta\, d\rho\, d\theta=-\frac{18\sqrt{3}}{5}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=\frac{18\sqrt{3}}{5}\cdot\cos\theta\Big|_0^{2\pi}=0$$

(*) Polarretan adierazita: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J|=\rho \quad$ eta $\quad R_{xy}\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le\sqrt{3} \end{cases}$

(2) Stokes-en teorema erabiliz.

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak eta C kurba itxia denez:

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C\left(ydx+xdy+xzdz\right)\overset{(**)}{=}\oint_C\left(ydx+xdy\right)=0$$

(**) $C\equiv\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=3 \quad\Rightarrow\quad dz=0 \end{cases}$

(3) Gauss-en teorema erabiliz.

Izan bedi $S'\equiv S\cup S_1$ gainazal itxia, non $S_1\equiv z=3 \quad \forall(x,y)\in x^2+y^2\le 3$

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, orduan:

$$\iint_{S'} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\right) dxdydz = 0$$

Beraz, $\iint_{S} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = -\left(\pm\iint_{R_{xy}} \left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right) dxdy\right) \overset{(***)}{=} 0$

(***) $\vec{N} = (0,0,1)$

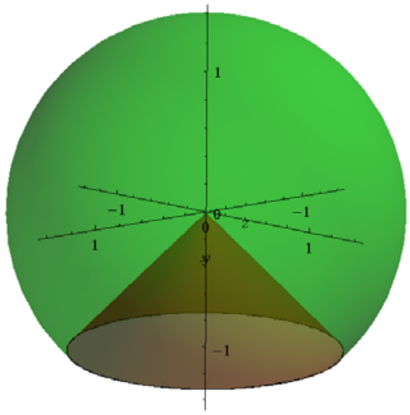
b) $S \equiv z = x^2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 3$ zatiaren azalera kalkulatu behar da:

$$Azalera(S) = \iint_S d\vec{S} = \iint_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy = \iint_{R_{xy}} \sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \left.\frac{\left(4\rho^2+1\right)^{3/2}}{3/2}\frac{1}{8}\right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\left(13^{3/2}-1\right)}{6}$$

6.- Integrazioa erabiliz, kalkulatu $V \equiv \begin{cases} z \geq -\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2 \leq 2 \end{cases}$ **solidoaren bolumena.**

(Puntu 1)



V solidoa mugatzen duten gainazalen arteko ebakidura-kurba honako hau da:

$$C \equiv \begin{cases} z = -\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Bolumena kalkulatzeko koordenatu esferikoak erabiliko ditugu:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad |J| = \rho^2 \cdot \sin\varphi$$

Orduan, $V \equiv \begin{cases} \cos\varphi \geq -\sin\varphi \\ \rho \leq \sqrt{2} \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$BOL(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\cos\varphi\Big|_0^{3\pi/4} = \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)\pi}{3}$$

7.- Kalkulatu espazioan definituriko $C \equiv \vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \\ z = \mathrm{L}t \end{cases}$ **kurbaren luzera,** $A = (2,1,0)$ **eta** $B = (4,4,\mathrm{L}2)$ **puntuen artean.**

(0.5 puntu)

$$C \equiv \vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \\ z = \mathrm{L}t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) \equiv \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 2t \\ z' = \dfrac{1}{t} \end{cases} \quad 1 \le t \le 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 + 4t^4 + 1}}{t} = \frac{\sqrt{\left(2t^2+1\right)^2}}{t} = \frac{2t^2+1}{t} = 2t + \frac{1}{t}$$

$$Luzera(C) = \int_C ds = \int_1^2 \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = \left(t^2 + \mathrm{L}t\right)\Big|_1^2 = 4 + \mathrm{L}2 - 1 = 3 + \mathrm{L}2$$