Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Kalkulatu, $(0,0)$ **puntuan, <u>definizioa erabiliz</u>, bere deribatu direkzionalak** $\vec{u}=(1,1)$**,** $\vec{u}=(1,0)$ **eta** $\vec{u}=(0,1)$ **norabideetan.**

b) Aurreko emaitzak ikusita, zer esan dezakezu funtzioaren diferentziagarritasunaz $(0,0)$ **puntuan?**

(1.5 puntu)

a) $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\dfrac{\lambda^3\cdot h_1^2\cdot h_2}{\lambda^2}}{\lambda}=h_1^2\cdot h_2 \quad \forall\vec{u}=(h_1,h_2)$ unitario

Baldin $\vec{u}=(1,0) \quad \Rightarrow \quad \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=f'_x(0,0)=0$

Baldin $\vec{u}=(0,1) \quad \Rightarrow \quad \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=f'_y(0,0)=0$

Baldin $\vec{u}=(1,1) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unitarioa da, eta $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Aurreko atalean lortutako balioen arabera, baldin f diferentziagarria balitz $(0,0)$ puntuan, orduan:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=f'_x(0,0)\cdot h_1+f'_y(0,0)\cdot h_2=0 \quad \forall\vec{u}=(h_1,h_2) \text{ unitarioa.}$$

Baina $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ lortu dugu $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bektorerako. Beraz, f ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

2.- Aurkitu $g(x,y)=x^3+y^3$ funtzioak hartuko duen balio maximoa $x^2+y^2=1$ zirkunferentzian, eta adierazi zein puntutan lortuko duen.

(1.5 puntu)

g funtzio jarraitua eta $x^2+y^2=1$ multzo itxi eta mugatua denez, Weierstrass-en teoremak ziurtatzen digu, g funtzioak bere balio maximo eta minimo absolutuak hartzen dituela multzo horretan.

Kalkulatzeko, g funtzioaren puntu kritikoak multzo horretan lortuko ditugu. Puntu kritiko baldintzatuak, hain zuzen ere. Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa aplikatuz:

$$w(x,y)=x^3+y^3+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

Eta funtzio honen puntu kritikoak:

$$\begin{cases} w'_x=3x^2+2\lambda x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x+2\lambda)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\pm 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} A=(0,1) \\ B=(0,-1) \end{cases} \\ \lambda=-\dfrac{3x}{2} \end{cases} \\ w'_y=3y^2+2\lambda y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y(3y+2\lambda)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} y=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} C=(1,0) \\ D=(-1,0) \end{cases} \\ \lambda=-\dfrac{3y}{2} \end{cases} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Eta $\lambda=-\dfrac{3x}{2}=-\dfrac{3y}{2} \quad \Rightarrow \quad x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \begin{cases} E=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ F=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$

Beraz, 8 puntu kritiko lortu ditugu. Eta bakoitzean funtzioaren balioa kalkulatuz:

$$g(A)=g(C)=1 \qquad g(B)=g(D)=-1 \qquad g(E)=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad g(F)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Orduan, g-ren balio maximoa zirkunferentzia horretan 1 da, eta $A=(0,1)$ eta $C=(1,0)$ puntuetan lortzen da.

3.- Izan bedi $F(x,y,z)=xy+z+\sin(2z)+\int_1^x \frac{e^t-e}{t}dt+\int_y^{\pi/2}\frac{\cos t}{t}dt$ **.**

a) Estudiatu ea $F(x,y,\ z)=0$ **ekuazioak** $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitua definitzen duen** $P(x,y,\ z)=(1,\ \pi/2,\ -\pi/2)$ **puntuaren ingurunean.**

b) Kalkulatu $z'_x(1,\ \pi/2)$ **eta** $z'_y(1,\ \pi/2)$ **.**

(1.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz:

i. $F(P)=0$

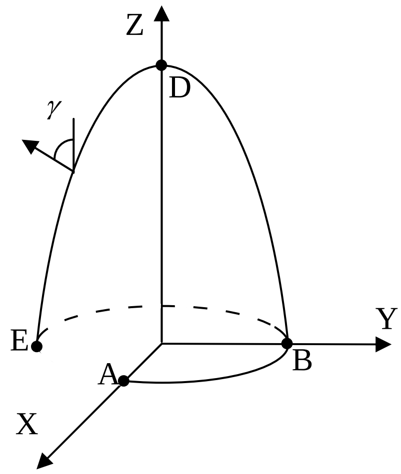
ii. $\exists\begin{cases} F'_x=y+\dfrac{e^x-e}{x} \\ F'_y=x-\dfrac{\cos y}{y} \\ F'_z=1+2\cos(2z)\end{cases}$ eta jarraituak dira $P(x,y,\ z)=(1,\ \pi/2,\ -\pi/2)$ puntuaren ingurunean non $x\neq 0$ eta $y\neq 0$.

iii. $F'_z(P)=-1\neq 0$

Beraz, $P(x,y,\ z)=(1,\ \pi/2,\ -\pi/2)$ puntuaren ingurunean $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria, $z(1,\ \pi/2)=-\pi/2$ izanik.

b) $z'_x(1,\ \pi/2)=-\dfrac{F'_x(P)}{F'_z(P)}=\dfrac{\pi}{2}$ y $z'_y(1,\ \pi/2)=-\dfrac{F'_y(P)}{F'_z(P)}=1$

4.- $\vec{F}(x,y,z) = 2x\cdot\vec{i} + (3y+xz)\cdot\vec{j} + (xy-z)\cdot\vec{k}$ **eremu bektoriala emanik, kalkulatu bere lerro-integrala** $x^2+y^2=4-z$ **(**$0\le z\le 4$**) gainazalean definituriko** $C \equiv ABDE$ **kurban zehar, non A(2,0,0), B(0,2,0), D(0,0,4) eta E(0,-2,0).**



(1.75 puntu)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(2xdx + (3y+xz)dy + (xy-z)dz\right) = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{BE}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

non, $\widehat{AB} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ eta $\widehat{BE} \equiv \begin{cases} z=4-y^2 \\ x=0 \end{cases}$.

Beraz:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} \left(2xdx+3ydy\right) = \int_2^0 2xdx + \int_0^2 3ydy = x^2\Big|_2^0 + \frac{3}{2}y^2\Big|_0^2 = 2 \\ \displaystyle\int_{\widehat{BE}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{BE}} \left(3ydy - zdz\right) = \int_2^{-2} 3ydy - \int_0^0 zdz = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2$$

<u>Beste modu batera (kasu honetan, askoz desegokiagoa)</u>:

$C' = C \cup \widehat{EA}$ kurba itxia definitzen dugu, non $\widehat{EA} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$, eta, honela, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez $\mathbb{R}^3$ osoan, Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_{C'} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{EA}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{(STOKES)}{=} \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy$$

non, $S \equiv z = 4-x^2-y^2 \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}_{xy} \equiv \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{N}=(2x,2y,1) \quad \gamma < \frac{\pi}{2}$

eta $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = (0,-y,z) = (0,-y,4-x^2-y^2)$

Beraz, $\oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} \left(4 - x^2 - 3y^2\right) dxdy$

Eta, koordenatu polarretan:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad \left[R_{xy} \equiv R_{\theta\rho} \equiv \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2 \end{cases} \right]$$

Beraz:

$$\oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho\left(4 - \rho^2\cos^2\theta - 3\rho^2\sin^2\theta\right) d\rho\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\left(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\right)\right)_0^2 d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 - 4\left(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\right)\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 - 2(1 + \cos(2\theta) - 6(1 - \cos(2\theta))\right) d\theta =$$

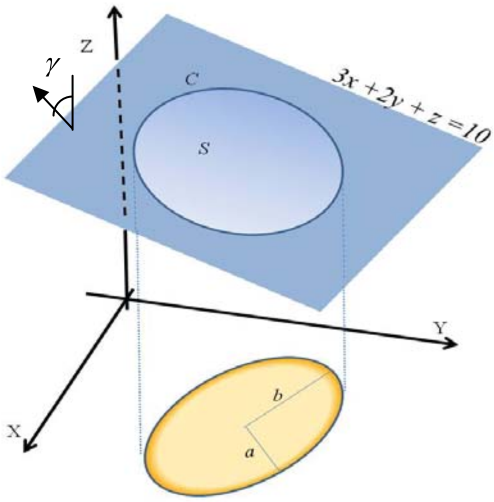
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(2\theta)\, d\theta = 2\sin(2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Eta $\int_{\widehat{EA}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{EA}} \left(2xdx + 3ydy\right) = \int_0^2 2xdx + \int_{-2}^0 3ydy = x^2\Big|_0^2 + \frac{3}{2}y^2\Big|_{-2}^0 = -2$

Orduan, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\widehat{EA}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2$

5.- a) Idatzi, arrazoituz, eta koordenatu egokiak erabiliz, *a* eta *b* ardatzerdietako elipseak mugaturiko eskualdearen azalera ematen duen integral bikoitza. Kalkulatu integral hori.

b) Kalkulatu $\vec{F} = \mathrm{L}x \cdot \vec{i} + \mathrm{L}y \cdot \vec{j} + \left[5 - \mathrm{L}(x^3 \cdot y^2)\right] \cdot \vec{k}$ **eremu bektorialak sortzen duen fluxua, *C* kurbak mugaturiko** $S \equiv 3x + 2y + z = 10$ **gainazalaren zatian zehar, bere proiekzioa** $z = 0$ **planoan *a* eta *b* ardatzerdietako elipsea delarik.**



(1.5 puntu)

a) Izan bedi $(0,0)$ puntuan zentroa duen elipsea, bere ardatzerdiak *a* eta *b* direlarik:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipse honek mugaturiko eskualdearen azalera kalkulatzeko koordenatu polarrak erabiliko ditugu:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = ab\rho \quad \Rightarrow \quad \left[R_{xy} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad R_{\theta\rho} \equiv \rho \le 1 \right]$$

Beraz:

$$Azalera\left(R_{xy}\right) = \iint_{R_{xy}} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho \, d\rho \, d\theta = ab\pi$$

b) $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\mathrm{L}x \cdot dydz + \mathrm{L}y \cdot dzdx + \left[5 - \mathrm{L}(x^3 \cdot y^2)\right] \cdot dxdy \right) = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N} \right) dxdy$

non $S \equiv 3x + 2y + z = 10 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = (3,2,1)\,,\ \gamma < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{R_{xy}} \left(3\mathrm{L}x + 2\mathrm{L}y + 5 - \mathrm{L}(x^3 \cdot y^2) \right) dxdy = \iint_{R_{xy}} 5dxdy = 5 \cdot Azalera\left(R_{xy}\right) = 5ab\pi$$

6.- Izan bedi $V \equiv \begin{cases} z \geq 4 - 2\sqrt{x^2+y^2} & (S_1) \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1 & (S_2) \\ z \leq 4 & (S_3) \end{cases}$ **solidoa mugatzen duen *S* gainazal itxia.**

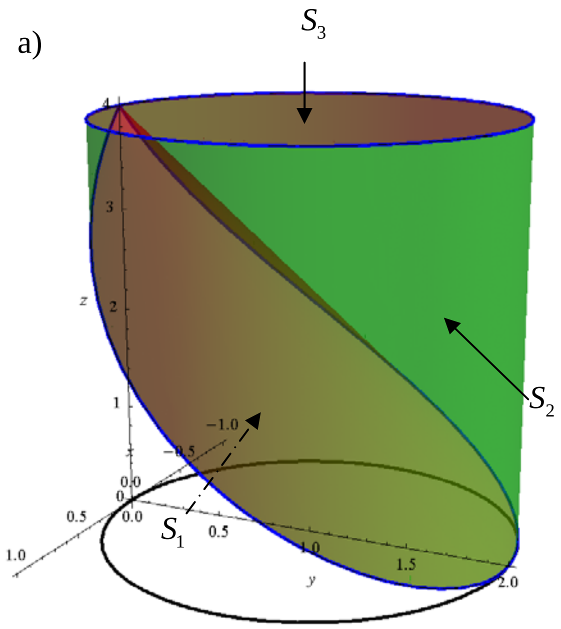
a) **Kalkulatu *V* solidoaren bolumena.**

b) $T(x,y,z) = 2x^2 + (y-1)^2 + 6z^2$ **funtzioak *V* solidoan dagoen tenperatura adierazten du.** $\vec{F} = -\vec{\nabla} T$ **eremu bektorialak, berriz, beroaren fluxuaren dentsitatea, *S* mugan zehar, ematen du. Kalkulatu *S* zeharkatzen duen** $\vec{F}$ **bektorearen fluxua.**

c) **Kalkulatu** $\vec{F}$**-ren zirkulazioa** S_1 **eta** S_2 **gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar.**

(2.25 puntu)

a)



Koordenatu zilindrikoak erabiliz:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} z \geq 4 - 2\rho \\ \rho \leq 2\sin\theta \\ z \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 2\sin\theta \\ 4 - 2\rho \leq z \leq 4 \end{cases}.$$ Beraz,

$$Bol(V) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_{4-2\rho}^{4} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} 2\rho^2 d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} 8\sin^3\theta d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta = \frac{16}{3}\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)_0^{\pi} = \frac{64}{9}$$

<u>Beste zenbait planteamendu</u>:

- ✓ Goiko aldagai-aldaketa erabiliz, baina integrazio-ordena aldatuz (mugak konplikatuagoak geratzen badira ere, sortzen den integrala, berriz, aurrekoa bezain erraza da)

$$V \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 4 - 4\sin\theta \leq z \leq 4 \\ \dfrac{4-z}{2} \leq \rho \leq 2\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Bol(V) = \int_0^{\pi}\int_{4-4\sin\theta}^{4}\int_{\frac{4-z}{2}}^{2\sin\theta} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_{4-4\sin\theta}^{4}\left(2\sin^2\theta - \frac{(4-z)^2}{8}\right)dz \, d\theta = \int_0^{\pi}\left(8\sin^3\theta - \frac{8\sin^3\theta}{3}\right)d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta \, d\theta = \frac{64}{9}$$

- ✓ Poloa (0,1) puntuan jarriz (ezin dugu ebatzi sortutako integrala):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 1+\rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 4-2\sqrt{\rho^2+2\rho\sin\theta+1} \le z \le 4 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Bol(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{4-2\sqrt{\rho^2+2\rho\sin\theta+1}}^{4} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\rho\sqrt{\rho^2+2\rho\sin\theta+1}\, d\rho\, d\theta$$

b) $\vec{F} = -\vec{\nabla}T = (-4x, -2(y-1), -12z)$ bektorearen fluxua S gainazalean zehar bere gainazal-integralak ematen digu. Bektore hori eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez $\mathbb{R}^3$ osoan, eta S gainazal itxia denez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \overset{(GAUSS)}{=} \iiint_V div(\vec{F})dxdydz = -18\cdot Bol(V) = -18\cdot\frac{64}{9} = -128$$

c) $\vec{F}$-ren zirkulazioa C kurba itxian zehar bere lerro integralak ematen du. Eta $\vec{F} = -\vec{\nabla}T$ denez, badakigu $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea dela. Beraz, $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

<u>Beste modu batera</u>: Stokes-en teorema erabili daiteke, eta $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, orduan

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{(STOKES)}{=} \iint_{S_1} \overrightarrow{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} \overset{(*)}{=} 0$$