| Ariketa 1 | Ariketa 2 | Ariketa 3 | Ariketa 4 | Ariketa 5 | Ariketa 6 | Guztira |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

**1.-** $P(x,y,z,t)=(1,0,0,1)$ **puntuan** $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x^2-y^2-z-t^3=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistemak** $z=z(x,y)$ **eta** $t=t(x,y)$ **funtzio diferentziagarriak definitzen dituela jakinda:**

a) **Kalkulatu** $t=t(x,y)$ **funtzioaren aldakuntza maximoa** $Q(x,y)=(1,0)$ **puntuan.**

b) **Kalkulatu** $t=t(x,y)$ **funtzioaren aldakuntza** $Q$ **puntuan,** $4x+3y+25=0$ **zuzenaren norabidean.**

**(2,25 puntu)**

a) $\left|\vec{\nabla} t(1,0)\right|$ kalkulatu behar dugu.

Emandako sisteman *x*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 1+z'_x-t'_x=0 \\ 2x-z'_x-3t^2\cdot t'_x=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 1+z'_x(1,0)-t'_x(1,0)=0 \\ 2-z'_x(1,0)-3t'_x(1,0)=0 \end{cases} \Rightarrow 3-4t'_x(1,0)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad t'_x(1,0)=\frac{3}{4}$$

Emandako sisteman *y*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 1+z'_y-t'_y=0 \\ -2y-z'_y-3t^2\cdot t'_y=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 1+z'_y(1,0)-t'_y(1,0)=0 \\ -z'_y(1,0)-3t'_y(1,0)=0 \end{cases} \Rightarrow 1-4t'_y(1,0)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad t'_y(1,0)=\frac{1}{4}$$

Beraz, $\left|\vec{\nabla} t(1,0)\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

b) $\left.\dfrac{dt}{d\vec{u}}\right|_{(1,0)}$ kalkulatu behar dugu, non $\vec{u}$ bektore unitarioak, $4x+3y+25=0$ zuzenaren norabidea adierazten du. Hau da, $\vec{u}=(-3,4) \overset{\text{unitarioa}}{\Rightarrow} \vec{u}=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

Beraz:

$$\left.\frac{dt}{d\vec{u}}\right|_{(1,0)} = -\frac{3}{5}\cdot t'_x(1,0)+\frac{4}{5}\cdot t'_y(1,0) = -\frac{9}{20}+\frac{4}{20} = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$$

<u>Oharra</u>:

$\vec{u}=(3,-4) \overset{\text{unitarioa}}{\Rightarrow} \vec{u}=\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ aukeratuz gero, orduan $\left.\dfrac{dt}{d\vec{u}}\right|_{(1,0)} = \dfrac{1}{4}$

Zeinuaren diferentzia, norabidean aukeratutako noranzkoaren mende besterik ez dago. Balio absolutuan, funtzioaren aldakuntza berdina da.

2.- **Aurkitu** $2x+z=4$ **eta** $x^2+y^2=17$ **baldintzak betetzen dituzten** $f(x,y,z)=y+2z$ **funtzioaren maximo eta minimo absolutuak, kontuan hartuta baldintza horiek espazioko elipsea definitzen dutela. (Justifikatu mutur absolutuen existentzia)**

**(1,5 puntu)**

Eskatzen dizkiguten maximoa eta minimoa elipse batean definituta daude, multzo itxi eta mugatuan, hain zuzen ere. Eta *f* funtzio jarraitua denez, Weierstrass-en teoremak ziurtatzen digu, existituko direla maximo eta minimo absolutuak multzo horretan.

Aldi berean, bi baldintza bete behar dituztenez, kalkulurako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y,z)=y+2z+\lambda\left(2x+z-4\right)+\mu\left(x^2+y^2-17\right)$$

Funtzio honen puntu kritikoak aurkituko ditugu:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x=2\lambda+2\mu x=0 \\ w'_y=1+2\mu y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mu=\dfrac{2}{x}=-\dfrac{1}{2y} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=-4y} \\ w'_z=2+\lambda=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda=-2} \\ 2x+z=4 \\ x^2+y^2=17 \quad \Rightarrow \quad 16y^2+y^2=17 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm 1 \end{cases}$$

Baldin $y=1 \quad \Rightarrow \quad x=-4 \quad \Rightarrow \quad z=12$

Baldin $y=-1 \quad \Rightarrow \quad x=4 \quad \Rightarrow \quad z=-4$

Bi puntu kritiko atera zaizkigu: $A(x,y,z)=(-4,1,12)$ eta $B(x,y,z)=(4,-1,-4)$

Eta, *f* funtzioaren balioa puntu horietan kalkulatuz:

$$f(A)=25 \text{ eta } f(B)=-9$$

Beraz, *A* maximo eta *B* minimo absolutuak dira.

3.- **Kalkulatu** $f(x,y)=\int_{\frac{1}{x}}^{1} \mathrm{L}(t\,x)dt+\int_{0}^{1-y} \mathrm{L}(t+y)dt$ **funtzioaren gradientea** $P(x,y)=(2,e)$ **puntuan.**

**(1,25 puntu)**

$$f'_x(x,y)=\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{dt}{x}+\frac{1}{x^2}\mathrm{L}(1)=\left.\frac{t}{x}\right|_{\frac{1}{x}}^{1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f'_x(2,e)=\frac{1}{4}$$

$$f'_y(x,y)=\int_{0}^{1-y}\frac{dt}{t+y}dt-\mathrm{L}(1)=\mathrm{L}(t+y)\Big|_0^{1-y}=\mathrm{L}(1)-\mathrm{L}(y) \quad\Rightarrow\quad f'_y(2,e)=-1$$

Beraz, $\vec{\nabla} f(2,e)=\left(\frac{1}{4},-1\right)$

**4.- Izan bedi lehenengo oktantean $C_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$, $C_2 \equiv \begin{cases} z=1-y \\ x=0 \end{cases}$ eta $C_3 \equiv \begin{cases} z=1-x^2 \\ y=0 \end{cases}$ kurbek definituriko *C* kurba itxia eta zatika leuna. Izan bedi *C* kurbak mugaturiko *S* gainazal leuna eta orientagarria, $S \equiv z=z(x,y) \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \equiv \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x\ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ erara adierazita.**

$\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2y,\ z\cos y+x^3, \sin y\right)$ **bektorea emanik:**

**a) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen dibergentzia eta errotazionala.**

**b) Kalkulatu, justifikatuz, $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa *C* kurban zehar.**

**(2,25 puntu)**

a) $\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2y,\ z\cos y+x^3, \sin y\right)=\left(X,Y,Z\right)$ eremu bektoriala emanik:

$$div\left(\vec{F}\right)=X'_x+Y'_y+Z'_z=2xy-z\sin y$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\left(Z'_y-Y'_z, X'_z-Z'_x, Y'_x-X'_y\right)=\left(\cos y-\cos y, 0-0, 3x^2-x^2\right)=\left(0,0,2x^2\right)$$

b) Ariketa bi eratan egin daiteke.

(i) Kontuan hartuta $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direla eta *C* kurba itxi eta sinplea, orduan <u>Stokes-en teorema erabili daiteke</u>:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{STOKES}}{=} \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}=\pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy$$

non $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\left(0,0,2x^2\right)$

eta $S \equiv z=z(x,y) \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \equiv \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x\ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{N}=\left(-z'_x,-z'_y,1\right)$

Beraz, $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}=2x^2 \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\pm\iint_{R_{xy}} 2x^2dxdy \overset{(*)}{=} \pm 2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3\cdot\cos^2\theta d\rho\, d\theta=$

(*) Polarretan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy}\equiv R_{\theta\rho}\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le 1 \end{cases}$

$$=\pm\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\pm\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos(2\theta)\right)d\theta=\pm\frac{1}{4}\left[\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} \overset{\left(\gamma<\frac{\pi}{2}\right)}{=} \frac{\pi}{8}$$

(ii) Lerro-integrala kalkulatuz:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \left(x^2 y\cdot dx + \left(z\cos y + x^3\right)\cdot dy + \sin y\cdot dz\right) = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- $$C_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{2} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos^2 t\cdot\sin^2 t + \cos^4 t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)^2\right]dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos(2t)+\frac{1+\cos(4t)}{2}-\frac{1-\cos(4t)}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos(2t)+\cos(4t)\right)dt = \frac{1}{4}\left(t+\sin(2t)+\frac{\sin(4t)}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

- $$C_2 \equiv \begin{cases} z=1-y \\ x=0 \end{cases} \quad x \text{ 1etik 0ra} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2}\left(z\cos y\cdot dy + \sin y\cdot dz\right) = \int_1^0\left((1-y)\cos y - \sin y\right)dy =$$

$$= \left(\sin y+\cos y\right)_1^0 - \int_1^0 y\cos y\,dy \overset{(*)}{=} \left(\sin y+\cos y\right)_1^0 - \left[\left(y\sin y\right)_1^0 - \int_1^0 \sin y\,dy\right] =$$

$$\textbf{(*)}\ \begin{cases} u=y \quad \Rightarrow \quad du=dy \\ dv=\cos y\,dy \quad \Rightarrow \quad v=\sin y \end{cases}$$

$$= \left(\sin y+\cos y\right)_1^0 - \left(y\sin y\right)_1^0 - \left(\cos y\right)_1^0 = 1-\sin 1-\cos 1+\sin 1-1+\cos 1 = 0$$

- $$C_3 \equiv \begin{cases} z=1-x^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Eta hiru emaitza hauek batuz:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{\pi}{8}$$

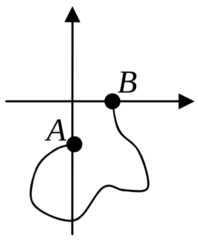
**5.- a)** $\vec{F}(x,y)=\dfrac{x}{(x-y)^2}\cdot\vec{i}+\dfrac{y-2x}{(x-y)^2}\cdot\vec{j}$ **eremu bektoriala emanik, aztertu** $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ **integralaren bidearekiko independentzia.**

**b) Azaldu aplikagarria den bidearekiko independentzia hurrengo kasuren batean, eta, baiezko kasuan, kalkulatu integralaren balioa:**

**i.** $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ **, non** $C\equiv x^2+y^2=1$

**ii.** $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ **, non** $C\equiv (x-1)^2+(y+1)^2=1$

**iii.** $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ **, non *C* marrazkian erakusten den kurba den,** $A=(0,-1)$ **puntutik** $B=(1,0)$ **puntura**




**(1,75 puntu)**

a) $\vec{F}(x,y)=X(x,y)\cdot\vec{i}+Y(x,y)\cdot\vec{j}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak funtzio jarraituak dira $\mathbb{R}^2-\{(x,y)\,/\,x-y=0\}$ eremuan. Eta $X'_y(x,y)=Y'_x(x,y)=\dfrac{2x}{(x-y)^3}$.

Izan bedi $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x-y>0\}$ (edo $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x-y<0\}$) <u>eremu sinpleki konexua</u>, non aurreko baldintzak egiaztatzen diren.

Orduan, $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ <u>bidearekiko independentea da eremu horretan</u>.

b) i. kasuan ezin da aplikatu bidearekiko independentzia, $C\equiv x^2+y^2=1$ kurba horrelako eremu sinpleki konexuan edukita ez baitago ($x-y=0$ zuzena zeharkatzen du).

ii. kasuan aplikagarria da, $C\equiv (x-1)^2+(y+1)^2=1$ kurba $D_1$ eremuan edukita baitago. Kurba itxia eta sinplea denez, orduan $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

iii. kasuan ere aplikagarria da, berriro $D_1$ eremuko kurba delako. Kasu honetan, *A* eta *B* puntuak elkartzen dituen zuzena definituko dugu, bide horretatik integratzeko:

$$C\equiv y=x-1 \quad\Rightarrow\quad \int_{C(A\to B)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1(-x-1)\,dx=\int_0^1(x-x-1)\,dx=-\int_0^1 dx=-1$$

**6.- Izan bedi** $\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2=2z \\ S_2 \equiv x^2+y^2=z+1 \end{cases}$ **gainazalek osatzen duten *S* gainazal itxia. Izan bedi, ere,** $\vec{F}(x,y,z)=2x^2\cdot\vec{i}-4xy\cdot\vec{j}+xy\cdot\vec{k}$ **funtzio bektoriala.**

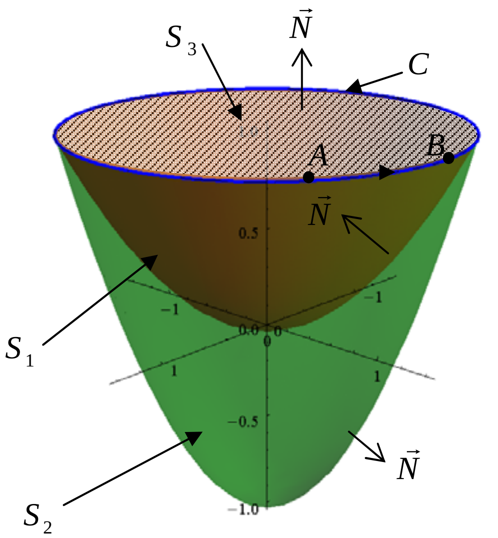
**a) Kalkulatu *S* gainazalak mugaturiko *V* solidoaren bolumena.**

**b) Kalkulatu** $\vec{F}$ **-ren integrala** $S_1$ **eta** $S_2$ **gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar,** $A=(1,1,1)$ **puntutik** $B=\left(0,\sqrt{2},1\right)$ **puntura.**

**c) Kalkulatu *S* osatzen duten** $S_1$ **eta** $S_2$ **zati bakoitzetik irteten diren** $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)$ **funtzioaren fluxuak.**

**(3,5 puntu)**

a)




$$S_1 \cap S_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2z=z+1 \quad \Leftrightarrow \quad z=1$$

$$\Leftrightarrow \quad C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Solidoaren bolumena zilindrikoetan kalkulatuko dugu:

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \quad |J|=\rho \\ z=z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \sqrt{2} \\ \rho^2-1 \le z \le \dfrac{\rho^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Bolumena}\,(V)=\iiint_V dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\rho^2-1}^{\frac{\rho^2}{2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\left(\frac{\rho^2}{2}-\rho^2+1\right)d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho-\frac{\rho^3}{2}\right)d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{8}\right)_0^{\sqrt{2}}d\theta=2\pi\left(1-\frac{1}{2}\right)=\pi$$

b) $$\int_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C(A\to B)}\left(2x^2\cdot dx-4xy\cdot dy+xy\cdot dz\right)=$$

$$C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=1 \end{cases} \begin{cases} A=(1,1,1)\text{tik} \quad \Leftrightarrow \quad t=\dfrac{\pi}{4} \\ B=\left(0,\sqrt{2},1\right)\text{ra} \quad \Leftrightarrow \quad t=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}\le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-4\sqrt{2}\cos^2 t\sin t - 8\sqrt{2}\cos^2 t\sin t\right)dt = \frac{12\sqrt{2}}{3}\cos^3 t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = -2$$

<u>Oharra</u>: Parametrizazio naturala erabili beharrean, kartesiarretan ere kalkula daiteke aurreko integrala.

$$C \equiv \begin{cases} y = \sqrt{2-x^2} \\ z = 1 \end{cases} \quad x \text{ 1etik 0ra} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dy = \dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}} \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{C(A\to B)} \left(2x^2\cdot dx - 4xy\cdot dy + xy\cdot dz\right) = \int_1^0 2x^2\cdot dx - \int_1^0 4x\sqrt{2-x^2}\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}\right)\cdot dx =$$

$$= \int_1^0 6x^2\cdot dx = 2x^3\Big|_1^0 = -2$$

c) Kontuan hartuta $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direla eta $S \equiv S_1 \cup S_2$ gainazal itxia, orduan <u>Causs-en teorema erabili daiteke:</u>

$$\iint\limits_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} \overset{\text{GAUSS}}{=} \iiint\limits_V \underbrace{div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\right)}_{=0} dxdydz = 0$$

Eta, aldi berean: $\iint\limits_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} + \iint\limits_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = 0$

Beraz, $\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = -\iint\limits_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$

Izan bitez $S_3 \equiv z = 1 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 2$, eta $S' \equiv S_3 \cup S_2$ gainazal itxia. Honela:

$$\iint\limits_{S'} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S_3} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} + \iint\limits_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint\limits_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = -\iint\limits_{S_3} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$$

Eta kalkula dezagun azken integral hau:

$$\iint\limits_{S_3} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \pm\iint\limits_{R_{xy}} \left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot \vec{N}\right)dxdy \overset{(*)}{=} \iint\limits_{R_{xy}} -4y\; dxdy \overset{(**)}{=} 0$$

(*) $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \left(x,-y,-4y\right)$, $\vec{N} = \left(0,0,1\right)$ eta $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$

(**) $y$ funtzio bakoitia da $y = 0$ zuzenarekiko simetrikoa den $R_{xy}$ eskualdean.

Beraz,

$$\iint\limits_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = 0 \text{ eta } \iint\limits_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = 0$$

Beste modu batera: $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)$ funtzioaren fluxuak definizioz kalkulatuz.

- $S_1$ gainazalaren zatitik irteten den $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)$-ren fluxua:

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy \overset{(*)}{=} \iint_{R_{xy}}\left(-x^2+y^2-4y\right)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\left(-\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-4\rho\sin\theta\right)d\rho\, d\theta =$$

(*) $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\left(x,-y,-4y\right)$, $\vec{N}=\left(-x,-y,1\right)$, $\gamma<\frac{\pi}{2}$ eta $R_{xy}\equiv R_{\theta\rho}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le\sqrt{2}\end{cases}$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+\frac{4\rho^3}{3}\sin\theta\right)_0^{\sqrt{2}} d\theta = -\int_0^{2\pi}\left(\cos(2\theta)+\frac{8\sqrt{2}}{3}\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= \left(-\frac{\sin(2\theta)}{2}+\frac{8\sqrt{2}}{3}\cos\theta\right)_0^{2\pi} = 0$$

- $S_2$ gainazalaren zatitik irteten den $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)$-ren fluxua:

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy \overset{(*)}{=} -\iint_{R_{xy}}\left(-2x^2+2y^2-4y\right)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\left(2\rho^2\cos^2\theta-2\rho^2\sin^2\theta+4\rho\sin\theta\right)d\rho\, d\theta =$$

(*) $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\left(x,-y,-4y\right)$, $\vec{N}=\left(-2x,-2y,1\right)$, $\gamma>\frac{\pi}{2}$ eta $R_{xy}\equiv R_{\theta\rho}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le\sqrt{2}\end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho^3\cos^2\theta-2\rho^3\sin^2\theta+4\rho^2\sin\theta\right)d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+4\frac{\rho^3}{3}\sin\theta\right)_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(2\cos(2\theta)+\frac{8\sqrt{2}}{3}\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= \left(\sin(2\theta)-\frac{8\sqrt{2}}{3}\cos\theta\right)_0^{2\pi} = 0$$