Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Izan bedi $V(x,y)=\dfrac{8}{x^2+y^2}$ adierazpenak emandako partikula baten potentzial elektrikoa, eta demagun $P(x,y)=(2,2)$ puntuan partikula bat dagoela.

a) Zein norabide eta noranzkotan mugitu behar da partikula bere potentzial elektrikoa ahalik eta arinen gutxitzeko?

b) Kalkulatu potentzial elektrikoaren aldakuntza baldin eta partikula *P* puntutik mugitzen bada $y=4-x$ zuzenean zehar.

c) Zein norabidetan mugitu beharko litzateke partikula, bere potentzial elektrikoa ez aldatzeko?

(1.25 puntu)

a) Potentzial elektrikoa adierazten duen funtzioa diferentziagarria da $\forall(x,y)\neq(0,0)$. Beraz, ahalik eta arinen jaitsiko da gradientearen kontrako noranzkoan:

$$\left.\begin{array}{l} V'_x=\dfrac{-16x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \;\Rightarrow\; V'_x(P)=-\dfrac{1}{2} \\ V'_y=\dfrac{-16y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \;\Rightarrow\; V'_y(P)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\overrightarrow{\nabla V}(P)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

b) $y=4-x$ zuzenaren norabide-bektorea $\vec{u}=(1,-1) \;\Rightarrow\; \vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unitarioa.

Beraz, potentzial elektrikoaren aldakuntza norabide horretan deribatu direkzionalak ematen du:

$$\left.\frac{dV}{d\vec{u}}\right|_P=\overrightarrow{\nabla V}(P)\cdot\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$$

c) Aurreko atalean frogatu dugunez, potentzial elektrikoa ez aldatzeko, $y=4-x$ zuzenaren norabidean mugitu beharko litzateke partikula. Hau da, $\vec{u}=(1,-1)$ bektorearen norabidean. Izan ere, $\vec{u}\perp\overrightarrow{\nabla V}(P)$.

2.- $F(x,y,z)=z^2x^2+xy^2+z^2-5=0$ **ekuazioa eta** $A(x,y,z)=(0,0,0)$ **,** $B(x,y,z)=(2,0,1)$ **eta** $C(x,y,z)=(5,1,0)$ **puntuak emanik:**

a) Estudiatu, puntu horietatik, zeinetan definitzen duen emandako ekuazioak $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitua.**

b) Aurreko atalean lortutako punturako edo puntuetarako, aurkitu $z=z(x,y)$ **funtzioak definituriko gainazalaren bektore normala, eta dagokion plano ukitzailea.**

(1.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema ekuazioari aplikatuko diogu emandako puntuetan:

i. $F(A)=-5\neq 0$ $\quad F(B)=0$ $\quad F(C)=0$

ii. $F'_x=2xz^2+y^2$ $\quad F'_y=2xy$ $\quad F'_z=2zx^2+2z$ existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

iii. $F'_z(B)=10\neq 0$ $\quad F'_z(C)=0$

Beraz, ekuazioak bakarrik $B(x,y,z)=(2,0,1)$ puntuaren ingurune batean definitzen du $z=z(x,y)$ funtzio inplizitu diferentziagarri bakarra, non $z(2,0)=1$.

b) $z=z(x,y)$ funtzioak definituriko gainazalaren bektore normala $\vec{N}=\left(-z'_x,-z'_y,1\right)$ da.

Emandako ekuazioan *x*-rekiko deribatuz:

$$F'_x+F'_z\cdot z'_x=0 \quad\Leftrightarrow\quad z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z} \quad\Rightarrow\quad z'_x(2,0)=-\frac{F'_x(P)}{F'_z(P)}=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}$$

Eta, era berean, *y*-rekiko deribatuz:

$$F'_y+F'_z\cdot z'_y=0 \quad\Leftrightarrow\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z} \quad\Rightarrow\quad z'_y(2,0)=-\frac{F'_y(P)}{F'_z(P)}=0$$

Beraz, *B* punturako, $\vec{N}=\left(\frac{2}{5},0,1\right)$, eta plano ukitzailea:

$$z-1=-\frac{2}{5}(x-2) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{5}(x-2)+z-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{5}x+z-\frac{9}{5}=0$$

3.- Kalkulatu $f(x,y)=\int_0^x \frac{e^t-e}{t}\,dt+\int_y^0 \frac{\cos t}{t}\,dt$ **funtzioaren mutur erlatiboak, non** $x\in(0,2\pi)$ **eta** $y\in(0,2\pi)$**.**

(1.75 puntu)

B.B. Puntu kritikoen kalkulua:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{e^x-e}{x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \\ f'_y(x,y)=-\dfrac{\cos y}{y}=0 \quad \overset{y\in(0,2\pi)}{\Leftrightarrow} \quad y=\dfrac{\pi}{2},\ \ y=\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Beraz, bi puntu kritiko atera zaizkigu: $A=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ eta $B=\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)$

B.N. Puntu kritikoen sailkapena:

$$\left.\begin{array}{l} f''_{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+e}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''_{x^2}(A)=f''_{x^2}(B)=e \\ f''_{xy}=0 \\ f''_{y^2}=\dfrac{y\sin y+\cos y}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''_{y^2}(A)=\dfrac{2}{\pi} \\ f''_{y^2}(A)=-\dfrac{2}{3\pi} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Hf(A)=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{\pi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1=e>0 \\ \Delta_2=\dfrac{2e}{\pi}>0 \end{cases} \\ Hf(B)=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{3\pi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1=e>0 \\ \Delta_2=-\dfrac{2e}{3\pi}<0 \end{cases} \end{cases}$$

Beraz, *A* minimo erlatiboa da eta *B* zeladura-puntua da.

Edo, baita honela ere:

$$d^2f(A)=e\cdot(dx)^2+\frac{2}{\pi}\cdot(dy)^2>0 \quad \forall(dx,dy)\neq(0,0)$$

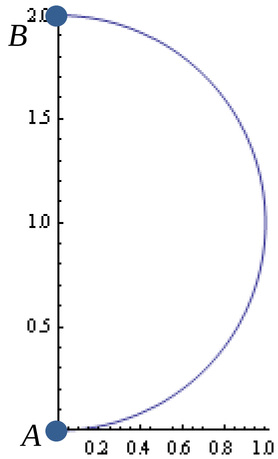
$$d^2f(B)=e\cdot(dx)^2-\frac{2}{3\pi}\cdot(dy)^2 \gtrless 0 \quad \forall(dx,dy)\neq(0,0)$$

4.- Izan bitez $C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x > 0 \end{cases}$ **kurba, eta** $A(0,0)$, $B(0,2)$ **puntuak.**

a) Kalkulatu $I = \int_{C_{(A\to B)}} (x^2 - y^2)ds$

b) Kalkulatu $I = \int_{C_{(A\to B)}} \left(x^2dx - y^2dy\right)$

(1.5 puntu)



$$C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Eta $\vec{r}\,'(t) = \left(-\sin t, \cos t\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{r}\,'(t)\right| = 1$

Orduan:

a) $$I = \int_{C_{(A\to B)}} (x^2 - y^2)ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - (1+\sin t)^2\right)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - 1 - 2\sin t - \sin^2 t\right)dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2t) - 1 - 2\sin t\right)dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} - t + 2\cos t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\pi$$

b) $$I = \int_{C_{(A\to B)}} \left(x^2dx - y^2dy\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin t \cdot \cos^2 t - \cos t \cdot (1+\sin t)^2\right)dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin t \cdot \cos^2 t - \cos t - 2\sin t \cdot \cos t - \cos t \cdot \sin^2 t\right)dt =$$

$$= \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \sin t - \sin^2 t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{8}{3}$$

Edo, baita honela ere:

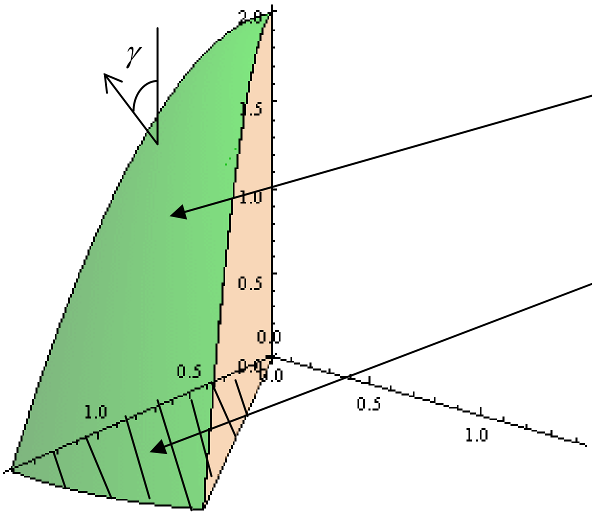
$$I = \int_{C_{(A\to B)}} \left(x^2dx - y^2dy\right) = \int_0^0 x^2dx - \int_0^2 y^2dy = -\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2 = -\frac{8}{3}$$

5.- a) Kalkulatu $z=0$, $y=0$ eta $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ planoek mugaturiko $S\equiv z=2-x^2-y^2$ gainazalaren zatiaren azalera.

b) Kalkulatu $\iint\limits_S \left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right)$, non S aurreko ataleko zati berdina den.

(2 puntu)

a) $\text{Azalera}(S)=\iint\limits_S dS=\iint\limits_{R_{xy}}\left|\vec{N}\right|dxdy$ non $\vec{N}\perp S$



$S\equiv z=2-x^2-y^2$

$$\forall(x,y)\in R_{xy}\equiv\begin{cases}x^2+y^2\le 2\\ 0\le y\le \dfrac{x}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$\vec{N}=\left(-z'_x,-z'_y,1\right)=(2x,2y,1)$

$\left|\vec{N}\right|=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$

$$\text{Azalera}(S)=\iint\limits_{R_{xy}}\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

(*) Integrala kalkulatzeko koordenatu polarrak erabiliko ditugu:

$$\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}\quad |J|=\rho\quad\Rightarrow\quad R_{xy}\equiv R_{\theta\rho}\equiv\begin{cases}0\le\rho\le\sqrt{2}\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\text{Azalera}(S)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\sqrt{2}}\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\, d\theta=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left.\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{72}\cdot\left(9^{3/2}-1\right)=\frac{13\pi}{36}$$

b) $\iint\limits_S\left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right)=\iint\limits_S\vec{F}\cdot d\vec{S}=\pm\iint\limits_{R_{xy}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy=$

non $\vec{F}=(x,y,z)$, $\vec{N}=\left(2x,2y,1\right)$ eta $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

$$=\iint\limits_{R_{xy}}\left(2x^2+2y^2+2-x^2-y^2\right)dxdy=\iint\limits_{R_{xy}}\left(x^2+y^2+2\right)dxdy\overset{(*)}{=}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\sqrt{2}}\rho\left(2+\rho^2\right)d\rho\, d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot\left.\left(\rho^2+\frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}\cdot(2+1)=\frac{\pi}{2}$$

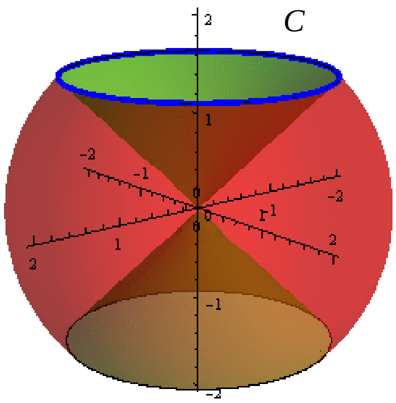
6.- Izan bedi $V \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ z^2 \le x^2+y^2 \end{cases}$ solidoa (V solidoa $S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=R^2$ gainazalaren barrutik eta $S_2 \equiv z^2 = x^2+y^2$ gainazalaren kanpotik definituta dago).

a) Kalkulatu *V* solidoaren bolumena.

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xyz+e^{\pi}$ funtzioa emanik, kalkulatu *V* solidoa mugatzen duen *S* gainazal itxitik irteten den <u>*f* funtzioaren gradientearen</u> fluxua.

c) Kalkulatu <u>*f* funtzioaren gradientearen</u> zirkulazioa $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ kurban zehar

(2 puntu)



a) V solidoa simetrikoa da $z=0$ planoarekiko. Esferikoetan:

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z=\rho\cdot\cos\varphi \end{cases} \quad |J|=\rho^2\cdot\sin\varphi$$

$S_1 \equiv \rho = R$ eta $S_2 \equiv \varphi = \pi/4, 3\pi/4$

$$V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le R \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Bolumena}(V) = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^R \rho^2\cdot\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{2\pi R^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2\pi R^3}{3}\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2\pi R^3\sqrt{2}}{3}$$

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xyz+e^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla f} = (2x+yz, 2y+xz, 2z+xy)$

Eta bektore honen fluxua:

$$\iint_S \overrightarrow{\nabla f}\cdot d\vec{S} \underset{(S \text{ itxia} \Rightarrow \text{Gauss})}{=} \iiint_V div\left(\overrightarrow{\nabla f}\right) dxdydz = 6\iiint_V dxdydz = 6\cdot\text{Bolumena}(V) = 4\pi R^3\sqrt{2}$$

c) $\overrightarrow{\nabla f}$ -ren zirkulazioa $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{R^2}{2} \\ z=\dfrac{R}{\sqrt{2}} \end{cases}$ kurba itxian zehar bere lerro-integralak ematen du. Eta, $\oint_C \overrightarrow{\nabla f}\cdot d\vec{r}=0$ bidearekiko independentea baita.

Izan ere, $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea $\Leftrightarrow$ $\exists f \,/\, \vec{F}=\overrightarrow{\nabla f}$.