Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y\cdot x^2-y^3}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.
b) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.
c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.
d) Bi ikaslek $\vec{u}=(1,-1)$ bektorearen norabidean deribatu direkzionala kalkulatu dute (0,0) puntuan, eta bi emaitza ezberdin lortu dituzte:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=0 \quad \textbf{eta} \quad \left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zein da zuzena? Zergatik?

(3 puntu)

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\cdot x^2-y^3}{x^2+y^2}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho^3\cdot\left(\sin\theta\cdot\cos^2\theta-\sin^3\theta\right)}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\rho\cdot\sin\theta\cdot\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=0=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{h}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{-k^3}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to0}\frac{-k^3}{k^3}=-1$$

c) Baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - h\cdot f'_x(0,0) - k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{k\cdot h^2 - k^3}{h^2+k^2} + k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{(*)}{=}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| k\cdot h^2 - k^3 + k\cdot h^2 + k^3\right|}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|2k\cdot h^2\right|}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} \overset{(*)}{=} \lim_{\substack{\rho\to 0^+ \\ \forall\theta\in[0,2\pi)}} \frac{2\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\left|\sin\theta\right|}{\rho^3} =$$

$= 2\cos^2\theta\cdot\left|\sin\theta\right| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

d) f diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan $\Rightarrow$ f -ren deribatu direkzionala definizioz kalkulatu beharko dugu:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(\lambda h_1, \lambda h_2\right) - f(0,0)}{\lambda} \quad \forall\vec{u} = \left(h_1, h_2\right) \text{ unitario}$$

Beraz, $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{\lambda^3\cdot h_2\cdot h_1^2 - \lambda^3\cdot h_2^3}{\lambda^2\cdot\left(h_1^2+h_2^2\right)}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\left(h_2\cdot h_1^2 - h_2^3\right) = h_2\cdot\left(h_1^2 - h_2^2\right)$

Kasu honetan, $\vec{u} = (1,-1) \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{u}\right| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unitarioa da eta

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = 0\,.$$

(*) Limitea polarretan kalkulatuz.

2.- $h(x,y) = 2 \cdot e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ **funtzioak** (x,y) **punturako mendi baten altuera adierazten du.**

a) **(1,0) puntutik abiatuz, zein norabide eta noranzkotan hasi behar da ibiltzen ahalik eta arinen igotzeko?**

b) **Zein norabide hartu behar da altuera berdinean mantentzeko?**

c) $\vec{v} = (1,1)$ **bektoreak emandako norabidea jarraitzea erabakitzen badugu, igoko edo jaitsiko gara?**

(2 puntu)

h funtzio diferentziagarria da (funtzio diferentziagarrien konposaketa baita).

a) *h* funtzioa (mendiaren altuera, hain zuzen ere) ahalik eta arinen haziko da gradienteak adierazitako norabide eta noranzkoan.

$$\left.\begin{array}{l} h'_x = -4x \cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad h'_x(1,0) = -\dfrac{4}{e} \\ h'_y = -6y \cdot e^{-3y^2} \quad \Rightarrow \quad h'_y(1,0) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla h}(1,0) = \left(h'_x(1,0), h'_y(1,0)\right) = \left(-\frac{4}{e}, 0\right)$$

Hau da, (1,0) puntutik abiatuz, ahalik eta arinen igotzeko, OX ardatzaren noranzko negatiboan hasi behar da ibiltzen.

b) Altuera berdinean mantentzeko maila-kurbaren norabidea jarraitu behar da, hau da, gradientearekiko perpendikularra den norabidea:

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{\nabla h}(1,0) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = (0,1) \text{ (OY ardatzaren norabidea hain zuzen ere)}$$

c) Altueraren aldakuntza $\vec{v} = (1,1)$ bektoreak emandako norabidean, *h* funtzioaren deribatu direkzionalak adierazten du.

$\vec{v} = (1,1) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unitarioa da. Beraz:

$\left.\dfrac{dh}{d\vec{v}}\right|_{(1,0)} = \overrightarrow{\nabla h}(1,0) \cdot \vec{v} = \left(-\dfrac{4}{e}, 0\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{4}{e\sqrt{2}} < 0 \quad \Rightarrow$ norabide horretan jaitsiko gara.

3.- $\begin{cases} F(x,y,z,t) = e^{x-z} + yt + 3 = 0 \\ G(x,y,z,t) = e^{y+t} - xz = 0 \end{cases}$ **sistema emanik:**

a) Aztertu $z = z(x,y)$ **eta** $t = t(x,y)$ **funtzioak definitzen ote dituen** $P(x,y,z,t) = \left(1,2,1,-2\right)$ **puntuaren inguruen batean.**

b) Izan bedi $h(x,y) = z(x,y) + t(x,y)$**. Kalkulatu** $h'_x\left(1,2\right)$**.**

(2 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko diogu emandako ekuazio-sistema eta puntuari:

i. $\begin{cases} F(P) = 1-4+3 = 0 \\ G(P) = 1-1 = 0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x = e^{x-z} \quad F'_y = t \quad F'_z = -e^{x-z} \quad F'_t = y \\ G'_x = -z \quad G'_y = e^{y+t} \quad G'_z = -x \quad G'_t = e^{y+t} \end{cases}$ existitzen eta jarraituak dira

$P(x,y,z,t) = \left(1,2,1,-2\right)$ puntuaren ingurune batean. Izan ere, existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan.

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -e^{x-z} & y \\ -x & e^{y+t} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Beraz, $P(x,y,z,t) = \left(1,2,1,-2\right)$ puntuaren ingurune batean $\exists! \begin{cases} z = z(x,y) \\ t = t(x,y) \end{cases}$ funtzio-sistema diferentziagarria non $\begin{cases} z(1,2) = 1 \\ t(1,2) = -2 \end{cases}$.

b) $h(x,y) = z(x,y) + t(x,y) \quad \Rightarrow \quad h'_x\left(1,2\right) = z'_x(1,2) + t'_x(1,2)$

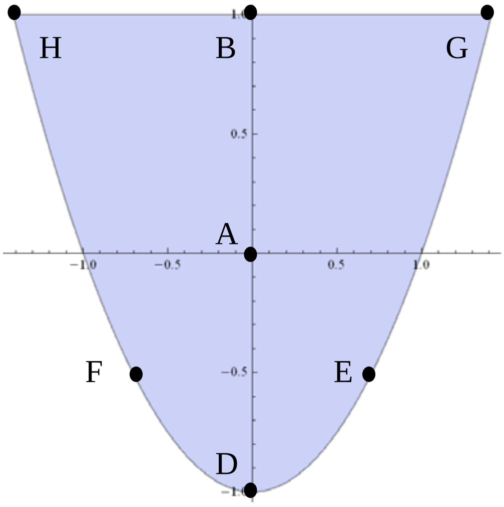
Orain $\begin{cases} F(x,y,z(x,y),t(x,y)) = 0 \\ G(x,y,z(x,y),t(x,y)) = 0 \end{cases}$ sisteman x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} e^{x-z} - e^{x-z} \cdot z'_x + y \cdot t'_x = 0 \\ e^{y+t} \cdot t'_x - z - x \cdot z'_x = 0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 1 - z'_x(1,2) + 2 \cdot t'_x(1,2) = 0 \\ t'_x(1,2) - 1 - z'_x(1,2) = 0 \end{cases} \overset{\text{kenduz}}{\Rightarrow} \quad 2 + t'_x(1,2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t'_x(1,2) = -2 \quad \Rightarrow \quad z'_x(1,2) = -3 \quad \Rightarrow \quad h'_x(1,2) = -5$$

4.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+y^2$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2-1\le y\le 1\right\}$ multzoan.

(2 puntu)



f funtzio jarraitua da eta *M* multzo itxi eta mugatua, beraz Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu, multzo horretan *f* funtzioak maximo eta minimo absolutuak hartuko dituela.
Mutur absolutuak ez du zertan mutur erlatiboa izango, horregatik puntu kritikoak aurkitu ondoren, ez diegu baldintza nahikoa aplikatuko mutur erlatiboen kalkulurako egin behar den bezala.

- Hasiko gara puntu kritikoak kalkulatzen baldintzarik ezarri gabe:

$$\begin{cases} f'_x=2x=0 & \Leftrightarrow \quad x=0 \\ f'_y=2y=0 & \Leftrightarrow \quad y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=(0,0)\in M}$$

- Orain puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu, *M*-ren mugan daudenak hain zuzen ere. Muga horretan hiru zati bereiziko ditugu (analitikoki, baldintza ezberdinak bete beharko dituzten puntu kritiko baldintzatuak dira alegia).

i. $y=1 \quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ mugako zatian daudenak. Orduan:

$$f(x,y)=x^2+y^2=x^2+1=F(x) \quad\Rightarrow\quad F'(x)=2x=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=(0,1)}$$

ii. $y=x^2-1 \quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ mugako zatian daudenak. Kasu honetan Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa aplikatuko dugu:

$$w(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2-1-y\right)$$

Funtzio honen puntu kritikoak:

$$\begin{cases} w'_x=2x+2\lambda x=2x(1+\lambda)=0 \quad\Rightarrow \begin{cases} x=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} y=-1 \\ \lambda=-1 \overset{(1)}{\Rightarrow} y=-\dfrac{1}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \\ w'_y=2y-\lambda=0 \quad (1) \\ x^2-1-y=0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D=(0,-1),\ E=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right) \ \text{ eta } \ F=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)}$$

iii. $y=x^2-1$ eta $y=1$ baldintzak batera betetzen dituztenak. Hau da, M-ren "erpinak":

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G=\left(\sqrt{2},1\right) \quad \text{eta} \quad H=\left(-\sqrt{2},1\right)}$$

Orain, *f*-ren balioa hauetako puntu kritiko bakoitzean kalkulatuz:

$$f(A)=0< f(E)= f(F)=\frac{3}{4}< f(B)= f(D)=1< f(G)= f(H)=3$$

Beraz, *A* puntuan minimo absolutua eta *G* eta *H* puntuetan maximo absolutuak daude.

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- $I=\int_C\left(\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy\right)$ **lerro-integrala emanik:**

a) Bidearekiko independentzia dago? Non?

b) Adierazi, hurrengo hiru kasuetatik, zeinetan aplikagarria den bidearekiko independentzia, eta emandako emaitzak ondorioztatu ahal diren dagokion integrala kalkulatu gabe:

i. $I=\oint_{C_1}\left(\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy\right)=0$ **non** $C_1\equiv x^2+y^2=1$

ii. $I=\oint_{C_2}\left(\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy\right)=0$ **non** $C_2\equiv(x-2)^2+(y-2)^2=1$

iii. $I=\int_{C_3(A\to B)}\left(\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\frac{dx}{x^2}$ **non** $C_3\equiv y=\sin x$**,** $A=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ **eta** $B=\left(\frac{5\pi}{2},1\right)$

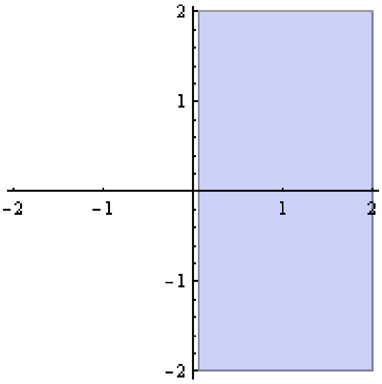
(2 puntu)

a) $I=\int_C\left(\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy\right)$ integralean bidearekiko independentzia dagoela ziurtatu ahal izateko honako baldintza hauek bete beharko dira:

- $X(x,y)=\frac{y}{x^2},\,Y(x,y)=-\frac{1}{x}$ eta horien deribatu partzialak jarraituak izatea $D\subseteq\mathbb{R}^2$ eremu batean (baldintza beharrezkoa).
- $X'_y=\frac{1}{x^2}=Y'_x$ $\quad D\subseteq\mathbb{R}^2$ eremuan (baldintza beharrezkoa).

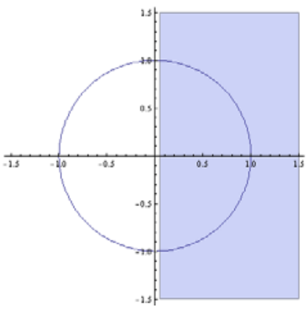
- Eta D eremu hori sinpleki konexua bada, orduan aurrekoa baldintza nahiko bihurtzen da.

Hortaz, izan bedi $D \subseteq \mathbb{R}^2 - \{x=0\}$ sinpleki konexua. Adibidez, hurrengo marrazkian erakusten den modukoa:



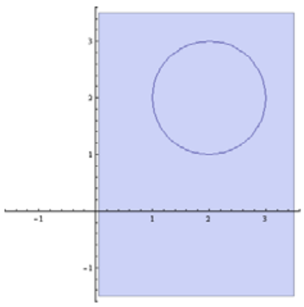
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$
Eremu honetan lehen aipatutako baldintzak egiaztatzen dira, beraz $I = \int_C \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy \right)$ bidearekiko independentea da.

b) i) $C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1$ jatorrian zentratutako eta 1 erradioko zirkunferentzia bat da:



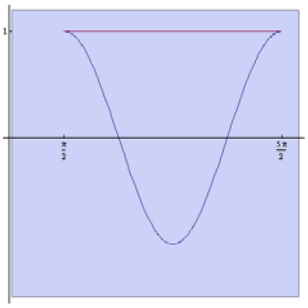
Irudia ikusita, argi geratzen da kurba hau ez dagoela D eremu sinpleki konexuaren barnean. Beraz, kasu honetan ezin da bidearekiko independentzia aplikatu.

ii) $C_2 \equiv (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ (2,2) puntuan zentratutako eta 1 erradioko zirkunferentzia bat da:



Kurba hau D eremu sinpleki konexuaren barnean dago, beraz, bidearekiko independentzia aplikagarria da. Eta kurba itxi eta sinplea denez $\Rightarrow$ $I = \oint_{C_2} \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy \right) = 0$

iii) $C_3 \equiv y = \sin x$ D eremu sinpleki konexuaren barnean dago, irudian ikusten den bezala. Beraz, bidearekiko independentzia betetzen du.



Hori dela eta, $C_3 \equiv y = \sin x$ kurban zehar integratu ordez, hasierako eta bukaerako puntuak elkartzen dituen zuzenean zehar integratu daiteke (irudian agertzen dena).
Hau da,

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad I = \int_{C_3(A \to B)} \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dx}{x^2}.$$

6.- Izan bitez $S_1 \equiv x^2+y^2=1$, $S_2 \equiv x^2+y^2=z+2$ **eta** $S_3 \equiv \sqrt{x^2+y^2}=3-z$ **gainazalak, eta defini dezagun** S_1 **gainazalaren barrutik,** S_2 **gainazalaren gainetik eta** S_3 **gainazalaren azpitik mugaturiko** ***V*** **solidoa. Bere muga osatzen duen gainazal itxi eta zatika leunari** ***S*** **deituko diogu.**

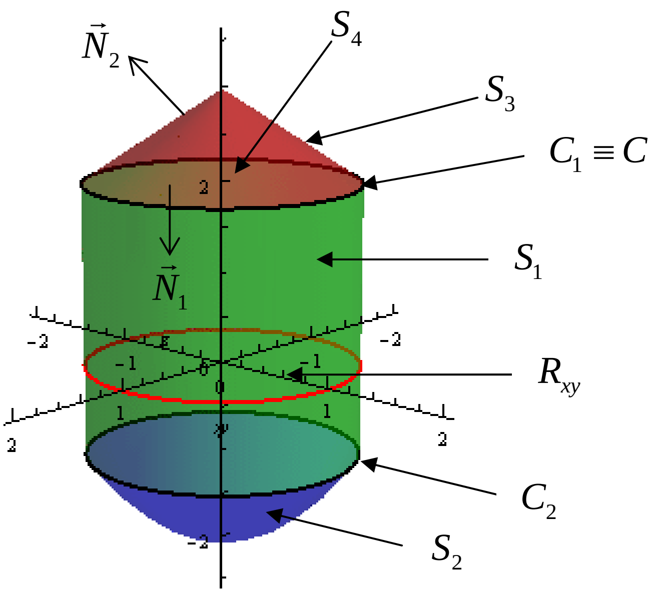
Izan bedi $\vec{F}(x,y,z)=\left(x+y^2+z^2\right)\cdot\vec{i}+\left(x^2+y+z^2\right)\cdot\vec{j}+\left(x^2+y^2+z\right)\cdot\vec{k}$ **eremu bektoriala.**

- **a) Kalkulatu** ***V*****-ren bolumena.**
- **b) Kalkulatu** ***S*** **gainazaletik irteten den fluxua** $\vec{F}$ **bektorearen eraginez.**
- **c) Kalkulatu** ***S*** **gainazala osatzen duen** S_3 **gainazalaren zatitik irteten den fluxua** $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)$ **bektorearen eraginez.**
- **d) Kalkulatu** $\vec{F}$ **bektorearen zirkulazioa** $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=2 \end{cases}$ **kurban zehar.**

(3 puntu)

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2=1 \\ S_3 \equiv z=3-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$C \equiv C_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2=1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2=z+2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$C_2 \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=-1 \end{cases}$$



a) Zilindrikoetan adierazita:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \quad |J|=\rho \quad \text{eta} \quad V \equiv \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \\ \rho^2-2\le z\le 3-\rho \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Bolumena}(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2-2}^{3-\rho}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=2\pi\int_0^1\rho\left(3-\rho-\rho^2+2\right)d\rho=2\pi\int_0^1\rho\left(5-\rho-\rho^2\right)d\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{5\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=2\pi\left[\frac{5}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]=\frac{23\pi}{6}$$

b) $$\Phi_S\left(\vec{F}\right)\overset{(S\text{ itxia}\Rightarrow\text{GAUSS})}{=}\iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz=3\iiint_V dxdydz=3\cdot\text{Bolumena}(V)=\frac{23\pi}{2}$$

c) Bi modutan kalkula daiteke:

c.1) Gauss-en teorema erabiliz.
Horretarako, lehenengo eta behin $S_4 \equiv z = 2 \quad \forall(x,y) \in R_{xy}$ gainazal berria aukeratuko dugu, eta $S' \equiv S_3 \cup S_4$ gainazal itxia osatuko dugu. Honela:

$$\Phi_{S'}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) \overset{(S' \text{ itxia} \Rightarrow \text{GAUSS})}{=} \iiint_{V'} div\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) dxdydz = 0 = \Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) + \Phi_{S_4}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) = -\Phi_{S_4}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) = -\iint_{S_4} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S} =$$

$$= -\iint_{S_4}\left((2y-2z)dydz + (2z-2x)dzdx + (2x-2y)dxdy\right) = -\left(\pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot \vec{N}\right)dxdy\right) \overset{(1)}{=}$$

(1) non $S_4 \equiv z = 2 \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_1 = (0,0,1)$ eta $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$

$$\overset{(1)}{=} \iint_{R_{xy}} (2x - 2y)\, dxdy \overset{(2)}{=} 0$$

(2) ($(2x-2y)$ funtzio bakoitia eta R_{xy} eskualde simetrikoa OX eta OY ardatzekiko baitira).

c.2) Definizioa erabiliz.

$$\Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\right) = \iint_{S_3} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3}\left((2y-2z)dydz + (2z-2x)dzdx + (2x-2y)dxdy\right) =$$

$$= \pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot \vec{N}\right)dxdy \overset{(3)}{=}$$

(3) non $S_3 \equiv \sqrt{x^2+y^2} = 3 - z \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \vec{N}_2 = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) \text{ eta } \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\overset{(3)}{=} \iint_{R_{xy}}\left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{6x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x + \frac{6y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x - 2y\right)dxdy =$$

$$= \iint_{R_{xy}}\left(\frac{6y-6x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x - 4y\right)dxdy \overset{(4)}{=}$$

(4) Polarretan adierazita:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J| = \rho \quad \text{eta} \quad \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$$

$$\overset{(4)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(6(\sin\theta - \cos\theta) + 4\rho(\cos\theta - \sin\theta)\right)\rho\, d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3(\sin\theta - \cos\theta)\cdot\rho^2 + \frac{4\rho^3}{3}(\cos\theta - \sin\theta) \right)_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-3 + \frac{4}{3} \right)(\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = 0$$

d) $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira eta $C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ kurba itxi eta leuna da. Beraz, Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_3} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\cdot d\vec{S} \overset{(c\text{ atalean})}{=} 0$$

Atal hau ere <u>beste modu batera</u> egin zezakeen. Definizioa erabiliz hain zuzen ere:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \left(\left(x + y^2 + z^2\right)\cdot dx + \left(x^2 + y + z^2\right)\cdot dy + \left(x^2 + y^2 + z\right)\cdot dz \right) \overset{(5)}{=}$$

(5) $C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 2 \end{cases}$

$$\overset{(5)}{=} \int_0^{2\pi} \left(-\sin t\cdot\left(\cos t + \sin^2 t + 4\right) + \cos t\cdot\left(\cos^2 t + \sin t + 4\right) \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t + \sin t\cdot\cos^2 t - 4\sin t + \cos t - \cos t\cdot\sin^2 t + 4\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-5\sin t + \sin t\cdot\cos^2 t + 5\cos t - \cos t\cdot\sin^2 t \right) dt =$$

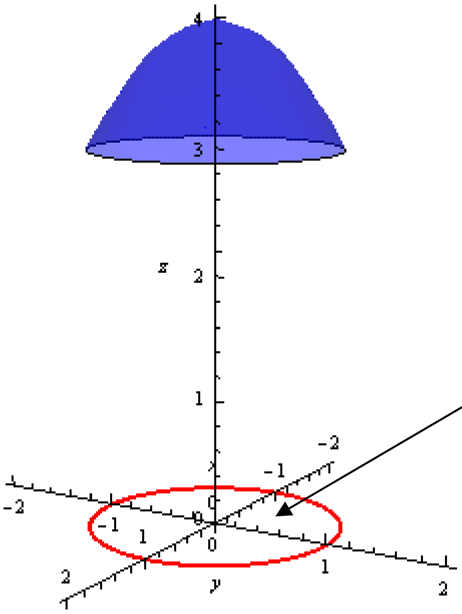
$$= \left(5\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} + 5\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

7.- a) Kalkulatu $S \equiv z = 4 - x^2 - y^2$ gainazalaren zatiaren azalera $z \geq 3$ denean.

b) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = y\cdot\vec{i} + z\cdot\vec{j} + x\cdot\vec{k}$ eremu bektorialaren lerro-integrala $C \equiv \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ y = x \end{cases}$ kurban zehar, $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ puntutik $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ puntura.

(2 puntu)

a)



$$\text{Azalera}(S) = \iint_S dS = \iint_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy =$$

$$= \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dxdy$$

non $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 1$

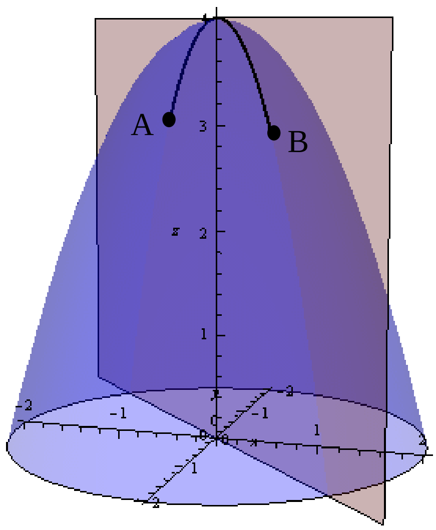
Polarretan adierazita:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J| = \rho \quad \text{eta} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

Orduan:

$$\text{Azalera}(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 2\pi\left[\frac{\left(1 + 4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$$

b)



$$\int_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C(A\to B)} \left(y\cdot dx + z\cdot dy + x\cdot dz\right)$$

non $C \equiv \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ y = x \end{cases} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4 - 2t^2 \end{cases}$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Orduan:

$$\int_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(t + 4 - 2t^2 - 4t^2\right) dt = \left[4t + \frac{t^2}{2} - 2t^3\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$