Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira 1. partziala

Azterketak bi zati ditu, bakoitza partzial bati dagokiona. Partzial bakoitzean ikasleak 4 ariketa ebatzi beharko ditu. Partzial bakoitzaren balioa 10 puntukoa da. Partzial bat bakarrik egin behar dutenek ordu bat erdi daukate burutzeko. Partzial biak egin behar dituztenentzat, azterketaren iraupena hiru ordukoa da.

LEHENENGO PARTZIALA

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Aztertu hurrengo serieen izaera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\mathrm{L}n} \quad \textbf{eta} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^n}$$

b) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\mathrm{L}2}+\ldots+\frac{1}{2+\mathrm{L}n}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\ldots+\frac{4^{n-1}}{3^n}}$.

(2 puntu)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \dfrac{1}{2+\mathrm{L}n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{2+\mathrm{L}n} > \dfrac{1}{2+n} \sim \dfrac{1}{n} \\ \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ dibergentea da} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ non $b_n = \dfrac{4^{n-1}}{3^n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n = \dfrac{4^{n-1}}{3^n} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4^{n-1}}{3^{n-1}} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\quad r = \dfrac{4}{3} > 1$ arrazoiko serie geometriko da beraz, dibergentea.

Emaitza bera ateratzen da $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serieari D´Alambert-en irizpidea aplikatzen bazaio:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^n}{3^{n+1}}}{\frac{4^{n-1}}{3^n}} = \frac{4}{3} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ dibergentea da.}$$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\mathrm{L}2} + \ldots + \frac{1}{2+\mathrm{L}n}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{3^n}} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$\left\{\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3^2} + \ldots + \dfrac{4^{n-1}}{3^n}\right\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea denez, Stolz aplika dezakegu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\mathrm{L}2} + \ldots + \frac{1}{2+\mathrm{L}n}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\mathrm{L}2} + \ldots + \frac{1}{2+\mathrm{L}n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\mathrm{L}2} + \ldots + \frac{1}{2+\mathrm{L}(n-1)}\right)}{\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{3^n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \ldots + \frac{4^{n-2}}{3^{n-1}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2+\mathrm{L}n}}{\frac{4^{n-1}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2+\mathrm{L}n} \overset{(*)}{=} 0$$

(*) $\dfrac{3}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\mathrm{L}n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

2.- a) Aurkitu $f(x)=\arctan(5x)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, tartea non balio duen adieraziz.

b) x aldagaiaren balio baterako, aurreko garapena $\dfrac{\pi}{4}$ batura duen zenbaki-serie bihurtzen da. Zehaztu zenbat gai hartu behar diren serie horretan, euren batuketa kalkulatzean, $\dfrac{\pi}{4}$ zenbakiaren balio hurbildua lortzeko, errorea 10^{-2} baino txikiagoa izanik.

(3 puntu)

a) $f(x)=\arctan(5x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{5}{1+25x^2}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}5\cdot\left(-25x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 5^{2n+1}\cdot x^{2n}$

(*) $r=-25x^2$ arrazoiko serie geometrikoaren batura. Garapena, beraz, konbergentea da

$$\Leftrightarrow \quad |r|=\left|-25x^2\right|=25x^2<1 \quad \Leftrightarrow \quad |x|<\frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$$

Eta integragarria da $[0,x]$ tartean $\forall x\in\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right)$:

$$f(x)-\underbrace{f(0)}_{=0}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 5^{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$$

Baldin $x=-\dfrac{1}{5}$ $\begin{cases}\exists f \text{ eta jarraitua da} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \text{ konbergentea da} \Rightarrow \exists \text{ batura jarraitua}\end{cases}$

Baldin $x=\dfrac{1}{5}$ $\begin{cases}\exists f \text{ eta jarraitua da} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1} \text{ konbergentea da} \Rightarrow \exists \text{ batura jarraitua}\end{cases}$

Beraz, $f(x)=\arctan(5x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 5^{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right]$

b) Baldin $x=\dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ serie alternatua lortzen dugu.,

Serie honek Leibniz-en teorema egiaztatzen du beraz, bere batura zehatza, $\dfrac{\pi}{4}$ hain zuzen ere, kalkulatu beharrean, S_n batura hurbildua kalkulatzen badugu, erroreari dagokionez hurrengo emaitza beteko da:

$$Errorea=\left|\frac{\pi}{4}-S_n\right|<\left|a_{n+1}\right|=\frac{1}{2n+3}\leq\frac{1}{10^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2n+3\geq 100 \quad \Leftrightarrow \quad n\geq 48,5 \quad \Rightarrow \quad n=49$$

gai hartu behar dira.

3.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

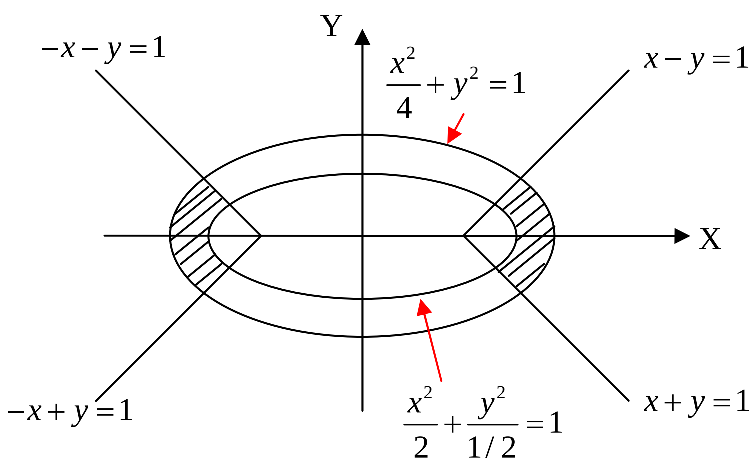
$$f(x,y)=\sqrt{|x|-|y|-1}+\arccos\left(x^2+4y^2-3\right)$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,|x|-|y|-1\geq 0,\ -1\leq x^2+4y^2-3\leq 1\right\}$$

$$|x|-|y|-1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad |x|-|y|\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x-y\geq 1 & \forall x\geq 0,\ \forall y\geq 0\\ x+y\geq 1 & \forall x\geq 0,\ \forall y\leq 0\\ -x-y\geq 1 & \forall x\leq 0,\ \forall y\geq 0\\ -x+y\geq 1 & \forall x\leq 0,\ \forall y\leq 0 \end{cases}$$

$$-1\leq x^2+4y^2-3\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\leq x^2+4y^2\leq 4 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1/2}\geq 1\\ \text{eta}\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 1 \end{cases}$$



4.- Izan bedi biltegi zilindrikoa non tenperatura $T(x,y,z)=10\cdot\left(x\cdot e^{-y^2}+z\cdot e^{-x^2}\right)$ funtzioak adierazten duen, eta demagun $P(x,y,z)=(0,0,2)$ puntuan gaudela.

a) Zehaztu zein litzateke tenperaturaren aldakuntzaren abiadura $Q(x,y,z)=(2,3,1)$ puntura abiatuko bagina lerro zuzena jarraituz.

b) Zein norabidetan mugitu beharko genuke tenperatura ahalik eta arinen jaisteko? Eta igotzeko?

c) Determinatu, kalkulatu gabe, *T*-ren deribatu direkzionalak *P* puntuan, $\vec{u}=(0,1,0)$ eta $\vec{v}=(-1,0,1)$ bektoreek adierazitako norabideetan. Nola justifikatzen dituzu emaitza hauek?

(3 puntu)

T funtzio diferentziagarria da (funtzio diferentziagarrien konposaketa baita).

a) $P(x,y,z)=(0,0,2)$ eta $Q(x,y,z)=(2,3,1)$ puntuak elkartzen dituen zuzenaren norabide-bektorea $\vec{u}=(2,3,-1)$ da.

$|\vec{u}|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$ unitarioa da.

Tenperaturaren aldakuntzaren abiadura norabide horren arabera deribatu direkzionalak adierazten du:

$$\left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_P=\overrightarrow{\nabla T}(P)\cdot\vec{u}$$

$$\left.\begin{array}{r}T'_x=10\cdot e^{-y^2}-20xz\cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad T'_x(P)=10\\ T'_y=-20xy\cdot e^{-y^2} \quad \Rightarrow \quad T'_y(P)=0\\ T'_z=10\cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad T'_z(P)=10\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla T}(P)=(10,0,10)$$

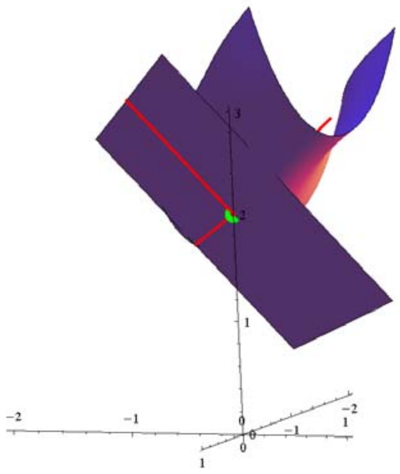
Orduan:

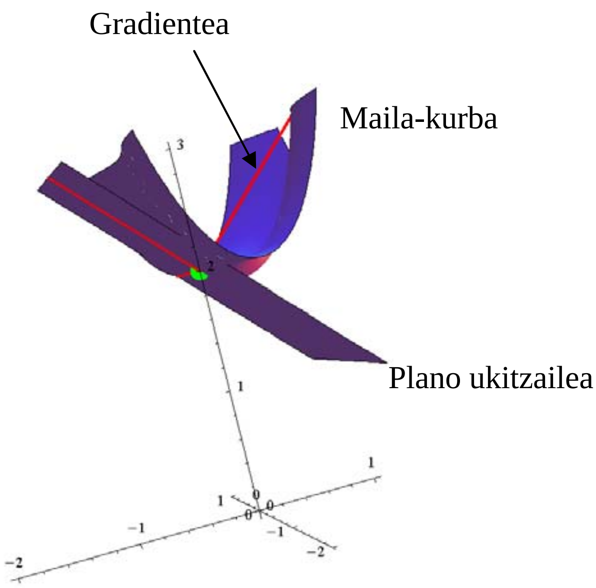
$$\left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_P=\overrightarrow{\nabla T}(P)\cdot\vec{u}=(10,0,10)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)=\frac{10}{\sqrt{14}}$$

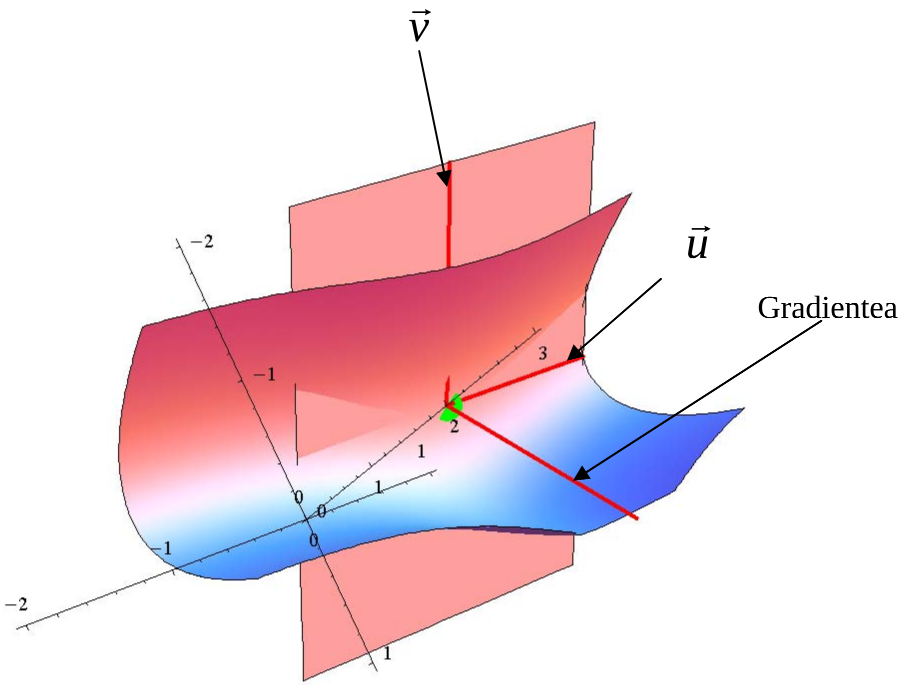
b) Tenperatura ahalik eta arinen jaisteko gradientearen kontrako norabidean mugitu beharko genuke: $-\overrightarrow{\nabla T}(P)\,||\,(-1,0,-1)$ norabidean, hain zuzen ere.
Eta arinen igotzeko, berriz, gradienteak adierazitako norabidean: $\overrightarrow{\nabla T}(P)\,||\,(1,0,1)$.

c) $\vec{u}=(0,1,0)\perp\overrightarrow{\nabla T}(P)$ eta $\vec{v}=(-1,0,1)\perp\overrightarrow{\nabla T}(P)$, hortaz, bi norabide horiek jarraituz, tenperatura ez da aldatzen. Hau da, $\left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_P=\left.\frac{dT}{d\vec{v}}\right|_P=0$

Hurrengo marrazkietan, P puntuari dagokion maila-kurba duzue (espazioko gainazala da, $T(x,y,z)=T(0,0,2) \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot e^{-y^2}+z\cdot e^{-x^2}=2$ ekuazioak adierazitakoa hain zuzen ere), P puntuan gainazal horren plano ukitzailea ($10x+10z-20=0$), eta $\overrightarrow{\nabla T}(P)$, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak ere:




Gradientea
Maila-kurba
Plano ukitzailea


$\vec{v}$
$\vec{u}$
Gradientea

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira 2. partziala

Azterketak bi zati ditu, bakoitza partzial bati dagokiona. Partzial bakoitzean ikasleak 4 ariketa ebatzi beharko ditu. Partzial bakoitzaren balioa 10 puntukoa da. Partzial bat bakarrik egin behar dutenek ordu bat erdi daukate burutzeko. Partzial biak egin behar dituztenentzat, azterketaren iraupena hiru ordukoa da.

BIGARREN PARTZIALA

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Frogatu $F(x,y,z)=z-\mathrm{L}(xyz)=0$ ekuazioak $z=z(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen duela $P(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},e^2,2\right)$ puntuaren ingurune batean.

b) Kalkulatu z'_x eta z'_y $Q(x,y)=\left(\frac{1}{2},e^2\right)$ puntuan. Puntu hau $z=z(x,y)$ funtzioaren mutur erlatiboa da?

(2 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko diogu emandako ekuazio eta puntuari:

i. $F(P)=2-\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\cdot e^2\cdot 2\right)=2-\mathrm{L}\left(e^2\right)=2-2\mathrm{L}e=0$

ii. $F'_x=-\frac{yz}{xyz}=-\frac{1}{x}$ $\quad F'_y=-\frac{xz}{xyz}=-\frac{1}{y}$ $\quad F'_z=1-\frac{xy}{xyz}=1-\frac{1}{z}$ existitzen eta jarraituak dira $P(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},e^2,2\right)$ puntuaren ingurune batean non $x\neq 0$, $y\neq 0$ eta $z\neq 0$.

iii. $F'_z(P)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$

Beraz, $P(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},e^2,2\right)$ puntuaren ingurune batean $\exists! z=z(x,y)$ funtzio diferentziagarria non $z\left(\frac{1}{2},e^2\right)=2$.

b) Orain $F(x, y, z(x, y)) = 0$ ekuazioan x-rekiko deribatuz:

$$z'_x - \frac{yz + xy \cdot z'_x}{xyz} = z'_x \cdot \left(1 - \frac{xy}{xyz}\right) - \frac{yz}{xyz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_x = \frac{\frac{yz}{xyz}}{1 - \frac{xy}{xyz}} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{x(z-1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_x(Q) = \frac{2}{\frac{1}{2}(2-1)} = 4$$

Era berean, ekuazioan y-rekiko deribatuz:

$$z'_y - \frac{xz + xy \cdot z'_y}{xyz} = z'_y \cdot \left(1 - \frac{xy}{xyz}\right) - \frac{xz}{xyz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_y = \frac{\frac{xz}{xyz}}{1 - \frac{xy}{xyz}} = \frac{xz}{xyz - xy} = \frac{z}{y(z-1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_y(Q) = \frac{2}{e^2 \cdot (2-1)} = \frac{2}{e^2}$$

$Q(x, y) = \left(\frac{1}{2}, e^2\right)$ puntua ezin da $z = z(x, y)$ funtzioaren mutur erlatiboa izan $z'_x(Q) = 4 \neq 0$ baita.

2.- Aurkitu $\varphi(x,y,z) = y^2 - x^2 - 1 = 0$ eta $\psi(x,y,z) = x + z = 0$ ekuazioen bitartez adierazitako baldintzak betetzen dituzten $f(x,y,z) = zx - y + 5$ funtzioaren mutur erlatiboak.

(3 puntu)

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu *f*-ren mutur erlatibo baldintzatuak lortzeko:

$$w(x,y,z) = zx - y + 5 + \lambda\left(y^2 - x^2 - 1\right) + \mu\left(x + z\right)$$

Funtzio honen puntu kritikoak:

$$\begin{cases} w'_x = z - 2\lambda x + \mu = 0 \overset{(1)\text{ eta }(2)}{\Leftrightarrow} -x - 2\lambda x - x = 0 \Leftrightarrow -2x(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \\ w'_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ w'_z = x + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -x \quad (1) \\ y^2 - x^2 - 1 = 0 \\ x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x \quad (2) \end{cases}$$

Baldin $\lambda = -1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4} < 0\,\#$

Baldin $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{2} \\ z = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

Beraz, bi puntu kritiko ditugu:

$$A(0,1,0) \quad \left(\lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = 0\right) \text{ eta } B(0,-1,0) \quad \left(\lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = 0\right)$$

Bi puntu hauek sailkatzeko, baldintza nahikoa aplikatuko diegu:

$$\begin{cases} w''_{x^2} = -2\lambda \Rightarrow w''_{x^2}(A) = -1 \quad w''_{x^2}(B) = 1 \\ w''_{y^2} = 2\lambda \Rightarrow w''_{y^2}(A) = 1 \quad w''_{y^2}(B) = -1 \\ w''_{z^2} = 0 \\ w''_{xy} = 0 \\ w''_{xz} = 1 \\ w''_{yz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2w(A) = -(dx)^2 + (dy)^2 + 2dxdz \\ \\ d^2w(B) = (dx)^2 - (dy)^2 + 2dxdz \end{cases}$$

Baina puntu kritiko hauek bete behar dituzten baldintzak hemen ere kontuan hartu behar ditugu, beraz:

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = y^2 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2ydy - 2xdx = 0 \underset{x=0}{\overset{A \text{ eta } B \text{ puntuetan}}{\Rightarrow}} dy = 0 \\ \psi(x,y,z) = x + z = 0 \Rightarrow dx + dz = 0 \Rightarrow dz = -dx \end{cases}$$

Eta hemendik:

$$\begin{cases} d^2w(A) = -(dx)^2 + (dy)^2 + 2dxdz = -(dx)^2 - 2(dx)^2 = -3(dx)^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ maximo erlatiboa} \\ \\ d^2w(B) = (dx)^2 - (dy)^2 + 2dxdz = (dx)^2 - 2(dx)^2 = -(dx)^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad B \text{ maximo erlatiboa} \end{cases}$$

3.- Izan bitez $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deribatu jarraitua duen funtzioa eta $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ deribatu partzial jarraituak dituen funtzioa. Adierazi, arrazoituz, hurrengo adierazpenak zuzenak edo okerrak ote diren:

a) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 g(x)dx\right)=g(x)$

b) $\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(x)dx\right)=g(t)$

c) $\frac{d}{dt}\left(\int_0^x f(x,t)dt\right)=\int_0^x f_t'(x,t)dt$

d) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x,t)dt\right)=\int_0^x f_x'(x,t)dt+f(x,x)$

e) $\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 f(x,t)dx\right)=\int_0^1 f_t'(x,t)dx$

f) **Baldin** $F(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^4}dx \quad\Rightarrow\quad F'(2)=\frac{1}{5}$

(1.5 puntu)

a) Okerra da: $\int_0^1 g(x)dx=kte. \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\left(\int_0^1 g(x)dx\right)=0$.

b) Zuzena da: $\int_0^t g(x)dx$ integral parametrikoa da, t parametroa delarik. Hortaz, t parametrorekiko deribatuz, emaitza hori lortzen da.

c) Okerra da: $\int_0^x f(x,t)dt$ integral parametrikoa da, x parametroa delarik. Beraz, kalkulatuko bagenu, emaitza x-ren mende definituriko funtzioa litzateke. Hortaz:

$$\int_0^x f(x,t)dt=F(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\int_0^x f(x,t)dt\right)=\frac{d}{dt}\left(F(x)\right)=0$$

d) Zuzena da: $\int_0^x f(x,t)dt$ integral parametrikoa da, x parametroa delarik. Beraz, x parametroarekiko deribatuz, emaitza hori lortuko genuke.

e) Zuzena da: $\int_0^1 f(x,t)dx$ integral parametrikoa da, t parametroa delarik, eta t parametrorekiko deribatuz, emaitza hori lortzen da.

f) Okerra da: $F(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^4}dx \quad\overset{\text{Deribazio parametrikoa}}{\Rightarrow}\quad F'(t)=\frac{1}{1+t^4} \quad\Rightarrow\quad F'(2)=\frac{1}{17}$

4.- Izan bedi $\begin{cases} S_1 \equiv x^2+z^2=4 \\ S_2 \equiv y+4=x^2+z^2 \\ S_3 \equiv y=8 \end{cases}$ **gainazalek osaturiko *S* gainazal itxia eta zatika leuna eta har dezagun** $\vec{F}(x,y,z)=2x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\vec{k}$ **eremu bektoriala. Kalkulatu:**

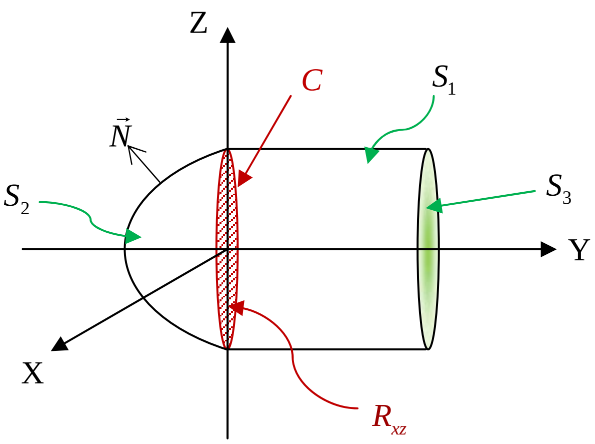
a) ***S* gainazala osatzen duen** S_2 **gainazalaren zatiaren azalera.**

b) ***S* gainazaletik irteten den fluxua** $\vec{F}$ **bektorearen eraginez.**

c) ***S* gainazala osatzen duen** S_2 **gainazalaren zatitik irteten den fluxua** $\vec{F}$ **bektorearen eraginez.**

d) $\vec{F}$ **bektorearen zirkulazioa** S_1 **eta** S_2 **gainazalen arteko *C* ebakidura-kurban zehar.**

(3.5 puntu)



$$C \equiv S_1 \cap S_2 \equiv \begin{cases} x^2+z^2=4 \\ y=0 \end{cases}$$

a) $\text{Azalera}(S_2)=\iint\limits_{S_2} dS=\iint\limits_{R_{xz}} \left|\vec{N}\right| dxdz=\iint\limits_{R_{xz}} \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz$

non $\begin{cases} \vec{N}=(-y'_x,1,-y'_z)\perp S_2 \\ S_2 \equiv y=x^2+z^2-4 \quad \forall(x,y)\in R_{xz}\equiv x^2+z^2\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x=2x \\ y'_z=2z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \left|\vec{N}\right|=\sqrt{1+4(x^2+z^2)}$

Orduan:

$$\text{Azalera}(S_2)=\iint\limits_{R_{xz}} \sqrt{1+4(x^2+z^2)}\,dxdz \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho d\theta = 2\pi \frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\Bigg|_0^2 =$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-1\right)$$

(*) Polarretan adierazita:

$$\begin{cases} z=\rho\cos\theta \\ x=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J|=\rho \quad \text{eta} \quad \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 2 \end{cases}$$

b) $\Phi_S\left(\vec{F}\right) \overset{(S \text{ itxia} \Rightarrow \text{GAUSS})}{=} \iiint\limits_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz =$

Zilindrikoetan adierazita:

$$\begin{cases} z=\rho\cos\theta \\ x=\rho\sin\theta \\ y=y \end{cases} \Rightarrow \quad |J|=\rho \quad \text{eta} \quad V\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 2 \\ \rho^2-4\le y\le 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2-4}^{8} \rho dyd\rho d\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\left(8-\rho^2+4\right)d\rho d\theta = 6\pi\int_0^2 \rho\left(8-\rho^2+4\right)d\rho$$

$$=6\pi\left[6\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 6\pi\left[24-4\right]=120\pi$$

c) $\Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right)=\iint\limits_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{S_2}\left(2xdydz+ydzdx+dxdy\right)=\pm\iint\limits_{R_{xz}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdz=$

non $\begin{cases} \vec{N}=\left(-y'_x,1,-y'_z\right)\perp S_2 \\ S_2\equiv y=x^2+z^2-4 \quad \forall(x,y)\in R_{xz}\equiv x^2+z^2\le 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} y'_x=2x \\ y'_z=2z \end{cases} \Rightarrow$

$$=\pm\iint\limits_{R_{xz}}\left(-4x^2+x^2+z^2-4-2z\right)dxdz \underset{\left(\beta>\frac{\pi}{2}\right)}{\overset{(*)}{=}} -\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(-4\rho^2\sin^2\theta+\rho^2-4-2\rho\cos\theta\right)\rho\, d\rho d\theta=$$

(*) Berriro polarretan adierazita:

$$\begin{cases} z=\rho\cos\theta \\ x=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J|=\rho \quad \text{eta} \quad \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 2 \end{cases}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left[-\rho^4\sin^2\theta+\frac{\rho^4}{4}-2\rho^2-\frac{2}{3}\rho^3\cos\theta\right]_0^2 d\theta=-\int_0^{2\pi}\left[-16\sin^2\theta+4-8-\frac{16}{3}\cos\theta\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[8\left(1-\cos(2\theta)\right)+4+\frac{16}{3}\cos\theta\right]d\theta=8\theta-4\sin(2\theta)+4\theta+\frac{8}{3}\sin\theta\Big|_0^{2\pi}=24\pi$$

d) $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint\limits_C\left(2xdx+ydy+dz\right)\overset{(**)}{=}0$

(**) $\vec{F}(x,y,z)=2x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\vec{k}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ eremu sinpleki konexuan, non $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}=\vec{0} \Rightarrow$ integrala bidearekiko independentea den. Eta *C* kurba itxi eta sinplea da.