INTEGRAZIO ANIZKOITZA (13/14 - 14/15)

1.- Izan bedi lehenengo oktantean $C_1 \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$, $C_2 \equiv \begin{cases} z=1-y \\ x=0 \end{cases}$ eta $C_3 \equiv \begin{cases} z=1-x^2 \\ y=0 \end{cases}$ kurbek definituriko C kurba itxia eta zatika leuna. Izan bedi C kurbak mugaturiko S gainazal leuna eta orientagarria, $S \equiv z = z(x,y) \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ erara adierazita.

$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 y,\ z\cos y + x^3, \sin y\right)$ bektorea emanik:

a) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen dibergentzia eta errotazionala.

b) Kalkulatu, justifikatuz, $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa C kurban zehar.

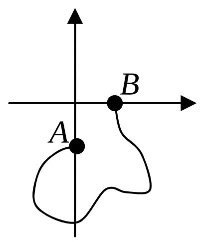
2.- a) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{(x-y)^2} \cdot \vec{i} + \dfrac{y-2x}{(x-y)^2} \cdot \vec{j}$ eremu bektoriala emanik, aztertu $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ integralaren bidearekiko independentzia.

b) Azaldu aplikagarria den bidearekiko independentzia hurrengo kasuren batean, eta, baiezko kasuan, kalkulatu integralaren balioa:

i. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, non $C \equiv x^2 + y^2 = 1$

ii. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, non $C \equiv (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

iii. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, non C marrazkian erakusten den kurba den, $A = (0,-1)$ puntutik $B = (1,0)$ puntura



3.- Izan bedi $\begin{cases} S_1 \equiv x^2 + y^2 = 2z \\ S_2 \equiv x^2 + y^2 = z+1 \end{cases}$ gainazalek osatzen duten S gainazal itxia. Izan bedi, ere, $\vec{F}(x,y,z) = 2x^2 \cdot \vec{i} - 4xy \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$ funtzio bektoriala.

a) Kalkulatu S gainazalak mugaturiko V solidoaren bolumena.

b) Kalkulatu $\vec{F}$-ren integrala S_1 eta S_2 gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar, $A = (1,1,1)$ puntutik $B = \left(0, \sqrt{2}, 1\right)$ puntura.

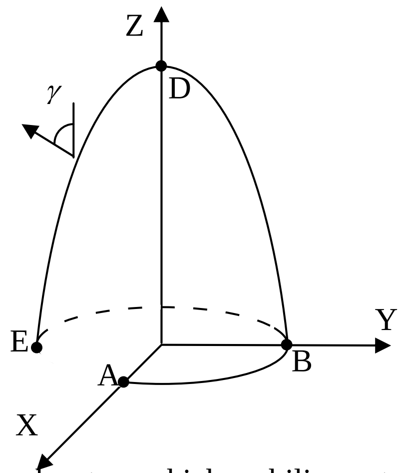
c) Kalkulatu S osatzen duten S_1 eta S_2 zati bakoitzetik irteten diren $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)$ funtzioaren fluxuak.

4.- Izan bedi $S_1 \equiv z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ eta $S_2 \equiv z = 1 - x^2 - y^2$ gainazalek osaturiko S gainazal itxia. Kalkulatu S_1 eta S_2 gainazal bakoitzetik irteten den $\vec{F}(x, y, z) = \left(y^3,\ x^3 z^2, 1\right)$ bektorearen fluxua.

5.- Izan bedi $S_1 \equiv z = \sqrt{x^2 + y^2}$ eta $S_2 \equiv 8 - 2z = x^2 + y^2$ gainazalek osaturiko S gainazal itxiak mugatzen duen V solidoa.

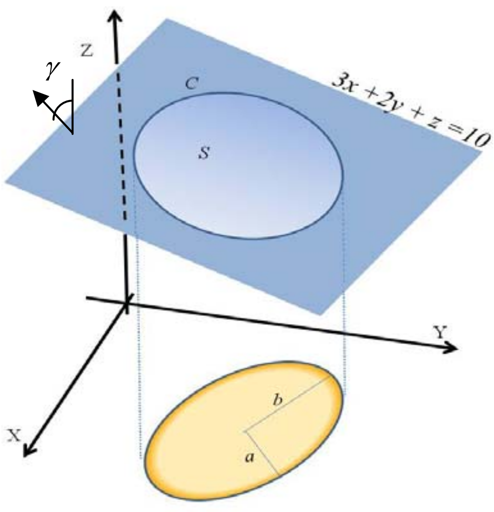
a) Kalkulatu V solidoaren bolumena.
b) Kalkulatu S osatzen duen S_1 gainazalaren zatiaren azalera.
c) Kalkulatu $\vec{F}(x, y, z) = yz^2 \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ eremu bektorialaren zirkulazioa S_1 eta S_2 gainazalen arteko C ebakidura-kurban zehar.

6.- $\vec{F}(x, y, z) = 2x \cdot \vec{i} + (3y + xz) \cdot \vec{j} + (xy - z) \cdot \vec{k}$ eremu bektoriala emanik, kalkulatu bere lerro-integrala $x^2 + y^2 = 4 - z$ $(0 \le z \le 4)$ gainazalean definituriko $C \equiv ABDE$ kurban zehar, non A(2,0,0), B(0,2,0), D(0,0,4) eta E(0,-2,0).



7.- a) Idatzi, arrazoituz, eta koordenatu egokiak erabiliz, *a* eta *b* ardatzerdietako elipseak mugaturiko eskualdearen azalera ematen duen integral bikoitza. Kalkulatu integral hori.

b) Kalkulatu $\vec{F} = \mathrm{L}x \cdot \vec{i} + \mathrm{L}y \cdot \vec{j} + \left[5 - \mathrm{L}(x^3 \cdot y^2)\right] \cdot \vec{k}$ eremu bektorialak sortzen duen fluxua, C kurbak mugaturiko $S \equiv 3x + 2y + z = 10$ gainazalaren zatian zehar, bere proiekzioa $z = 0$ planoan *a* eta *b* ardatzerdietako elipsea delarik.



8.- Izan bedi $V \equiv \begin{cases} z \geq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} & (S_1) \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1 & (S_2) \\ z \leq 4 & (S_3) \end{cases}$ solidoa mugatzen duen S gainazal itxia.

a) Kalkulatu V solidoaren bolumena.

b) $T(x,y,z) = 2x^2 + (y-1)^2 + 6z^2$ funtzioak V solidoan dagoen tenperatura adierazten du. $\vec{F} = -\vec{\nabla} T$ eremu bektorialak, berriz, beroaren fluxuaren dentsitatea, S mugan zehar, ematen du. Kalkulatu S zeharkatzen duen $\vec{F}$ bektorearen fluxua.

c) Kalkulatu $\vec{F}$-ren zirkulazioa S_1 eta S_2 gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar.

9.- Kalkulatu $\vec{F}(x,y) = (3y + e^{\cos x} + e^y) \cdot \vec{i} + x(5 + e^y) \cdot \vec{j}$ eremu bektorialaren zirkulazioa OABO bide itxian zehar, O(0,0) puntutik A(2,0) puntura OX ardatzetik doana, Atik B(1,1) puntura $(x-1)^2 + y^2 = 1$ zirkunferentzian zehar, erloju-orratzen kontrako noranzkoan, eta Btik Ora $x^2 + (y-1)^2 = 1$ zirkunferentzian zehar, erloju-orratzen noranzkoa jarraituz.

10.- a) Kalkulatu, integral anizkoitzaren bitartez, hurrengo bi gainazalek mugaturiko V solidoaren bolumena:

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 & \text{non } z \leq 1 \\ S_2 \equiv x^2 + y^2 = (z-2)^2 & \text{non } 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

b) Kalkulatu solidoaren muga osatzen duen S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

c) Izan bedi S gainazala V solidoaren muga. Izan bedi lehenengo oktantean definituriko $y = x$ planoaren eta S gainazalaren arteko C ebakidura kurba. Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ eremu bektorialaren lerro-integrala C kurba zehar.