SEGIDAK – SERIEAK (10/11 – 11/12 – 12/13)

(Eta Berretura-serieak – Seriezko garapenak – Taylor)

1.- a) Kalkulatu $a \in \mathbb{R}$ eta $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+n)\cdot\left(\sqrt[n]{2e}-1\right)}{\tan^a\left(\frac{1}{n}\right)} = A$ bete dadin.

b) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+9+\ldots+n^2}{a^n} \quad \forall a>0$.

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+n)}{(n+1)^n}}$.

3.- a) Aztertu hurrengo serieen izaera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\mathrm{L}n} \qquad \text{eta} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^n}$$

b) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\mathrm{L}2}+\ldots+\frac{1}{2+\mathrm{L}n}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\ldots+\frac{4^{n-1}}{3^n}}$.

4.- Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{a^n}+\dfrac{n^{10}+15}{3^n+5}\right)$ seriearen izaera $\forall a>0$.

5.- Estudiatu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{a^n\cdot n!}$ seriearen izaera $\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$. KONTUZ: Stirling

6.- Aurkitu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{4n+2}}{2n+1}$ berretura-seriearen konbergentzi arloa eta batura eremu horretan.

7.- Izan bedi $[0,1]$ tartean laugarren maila arte deribatu jarraituak dituen $y=f(x)$ funtzioa. Baldin bere Mclaurin-en 3. mailako polinomioa $P_3(x)=1-x+\dfrac{x^3}{3}$ bada:

a) Kalkulatu, gutxi gorabehera, *f*-ren balioa $x=\dfrac{1}{10}$ puntuan.

b) Aurkitu $f'(0)$ eta $f''(0)$.

c) Baldin $\left|f^{4)}(x)\right|<4 \quad \forall x\in[0,1]$, mugatu sortutako errorea a) atalean egindako hurbilketan.

8.- a) Aurkitu $f(x)=\arctan(5x)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, tartea non balio duen adieraziz.

b) x aldagaiaren balio baterako, aurreko garapena $\frac{\pi}{4}$ batura duen zenbaki-serie bihurtzen da. Zehaztu zenbat gai hartu behar diren serie horretan, euren batuketa kalkulatzean, $\frac{\pi}{4}$ zenbakiaren balio hurbildua lortzeko, errorea 10^{-2} baino txikiagoa izanik.

9.- a) a_n eta b_n gai orokorrak emanik, noiz esaten da baliokideak direla?

b) Hurrengo gai orokorrak emanik:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad b_n = \tan\left(\frac{3}{n^2+1}\right) \quad c_n = \frac{n^2+1}{n^2} \quad d_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^3}\right) \quad e_n = 3^{\frac{1}{n+1}},$$

erantzun, arrazoituz, ondoko galdera hauek:

i. Zeintzuk dira baliokideak?

ii. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ eta $\{e_n\}$ segiden artean, zeintzuk dira konbergenteak?

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ serieen artean, zeintzuk daukate izaera berdina?

10.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)}{n^2}$

11.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}$ seriearen izaera.

12.- Aurkitu $f(x) = \mathrm{L}(2+x) + \frac{2x}{1+x}$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

13.- a) Baldin f funtzioaren berretura-seriezko garapena $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (2n+1)\cdot x^{2n}$ bada, aurkitu $f''(0)$.

b) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ funtzioa emanik, non $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{n)}(x) = e^x(1+n+x) \quad \forall n = 0,1,2,\ldots$ ($f^{0)}(x) = f(x)$), lortu $p_2(x)$ ((McLaurin-en 2. mailako polinomioa) eta $r_2(x)$ (polinomio horri dagokion Lagrange-ren hondarra).

14.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+n\right)^{1/n} \quad \forall a>0$

15.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n}{3^{2n}} + n^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right)$ seriearen izaera.

16.- $1-\frac{2x}{3}+\frac{3x^2}{9}-\frac{4x^3}{27}+\ldots$ berretura-seriea emanik, adierazi x-ren hurrengo balioetatik, zeinetarako existitzen den batura finitua, eta kalkulatu kasu horietan:

$$x=e, \quad x=\pi, \quad x=-1, \quad x=3$$

17.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot \sin\left(\dfrac{\alpha^n}{n}\right) \cdot \left(n^{1/n} - 1\right)}{\mathrm{L}n} \qquad \forall \alpha > 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{1}\right) + \mathrm{L}\left[\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^4\right] + \ldots + \mathrm{L}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right]}{n^2}$

18.- Aztertu hurrengo serieen izaera:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

19.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\dfrac{1}{n^2+3}\right) + \left(\dfrac{2}{a}\right)^n\right]$ seriearen izaera, $a > 0$ parametroaren balioen arabera.

20.- a) Aurkitu $f(x) = \mathrm{L}\left(1+x^4\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Aurreko garapena erabiliz, kalkulatu zenbat batugai hartu behar dira $\mathrm{L}2$ -ren balio hurbildua lortzeko, $\varepsilon = 0.01$ baino errore txikiagoarekin.

21.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}}$

22.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n+2}$ seriearen izaera $\forall a \geq 0$.

23.- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot x^n}{n}$ berretura-seriea emanik:

a) Aurkitu bere konbergentzi arloa.

b) Kalkulatu bere batura konbergentea den eremuan.