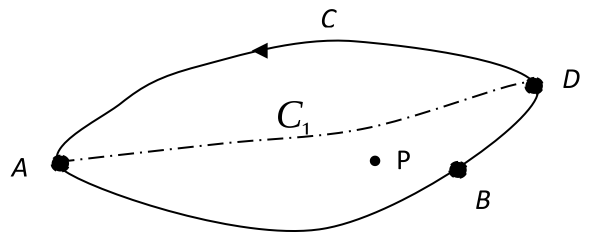
INTEGRAZIO ANIZKOITZA (10/11 – 11/12 – 12/13)

1.- a) Kalkulatu $C \equiv xy^2 - 2x^2 + 3y = 0$ kurban zehar $\int_A^B \left((1+y)dx + xdy\right)$, non $A = (0,0)$ eta $B = (3,2)$.

b) Har dezagun $\vec{F}(x,y) = X(x,y)\vec{i} + Y(x,y)\vec{j}$ eremu bektorial jarraitua deribatu partzial jarraituekin $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ multzoan, non $X'_y = Y'_x$ egiaztatzen duen.

Izan bitez grafikoan erakusten diren *A*, *B* eta *D* puntuak eta *C* eta C_1 kurbak:



$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9$, $\int_{C_1(A \to D)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 5$ eta $\int_{C(A \to B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 8$ ezagutuz gero, kalkulatu $\int_{C(D \to B)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

2.- Izan bedi $S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z \geq 0$ izanik, eta $S_2 \equiv (z+1)^2 = x^2 + y^2$, $z \geq -1$ izanik, gainazalek osaturiko *S* gainazal itxiak mugatzen duen *V* solidoa. Har dezagun, ere, $\vec{F}(x,y,z) = x \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (y - z) \cdot \vec{k}$ eremu bektoriala.

a) Kalkulatu *V*-ren bolumena.

b) Aurkitu *S* gainazala osatzen duen S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

c) Kalkulatu $\vec{F}$ bektoreari dagozkion fluxuak (irteten direnak):

i. *S* gainazalean zehar.

ii. *S* gainazala osatzen duen S_1 gainazalaren zatian zehar.

d) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen lerro-integrala $C \equiv \begin{cases} y^2 + z^2 = 5 \\ x = 0 \end{cases}$ kurban zehar, $A = \left(0, \frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ puntutik, $B = \left(0, 0, \sqrt{5}\right)$ puntura.

3.- Izan bedi $\begin{cases} S_1 \equiv x^2 + z^2 = 4 \\ S_2 \equiv y + 4 = x^2 + z^2 \\ S_3 \equiv y = 8 \end{cases}$ gainazalek osaturiko *S* gainazal itxia eta zatika leuna eta har dezagun $\vec{F}(x,y,z) = 2x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + \vec{k}$ eremu bektoriala. Kalkulatu:

a) *S* gainazala osatzen duen S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

b) *S* gainazaletik irteten den fluxua $\vec{F}$ bektorearen eraginez.

c) S gainazala osatzen duen S_2 gainazalaren zatitik irteten den fluxua $\vec{F}$ bektorearen eraginez.

d) $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa S_1 eta S_2 gainazalen arteko C ebakidura-kurban zehar.

4.- Izan bedi $\begin{cases} S_1 \equiv z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ S_2 \equiv z = x^2 + y^2 \end{cases}$ gainazalek osaturiko S gainazal itxiak mugatzen duen V solidoa. Izan bedi S_1 eta S_2 gainazalen arteko C ebakidura-kurba eta defini dezagun $\vec{F}(x,y,z) = (x+y)\cdot\vec{i} + (2x-z)\cdot\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ eremu bektoriala.

a) Kalkulatu V solidoaren bolumena.

b) Aurkitu S gainazala osatzen duen S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

c) Kalkulatu S gainazaletik irteten den fluxua $\vec{F}$ -ren eraginez.

d) Kalkulatu $\vec{F}$ -ren zirkulazioa C kurban zehar.

5.- $I = \int_C \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy \right)$ lerro-integrala emanik:

a) Bidearekiko independentzia dago? Non?

b) Adierazi, hurrengo hiru kasuetatik, zeinetan aplikagarria den bidearekiko independentzia, eta emandako emaitzak ondorioztatu ahal diren dagokion integrala kalkulatu gabe:

i. $I = \oint_{C_1} \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy \right) = 0$ non $C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1$

ii. $I = \oint_{C_2} \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy \right) = 0$ non $C_2 \equiv (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

iii. $I = \int_{C_3(A \to B)} \left(\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy \right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dx}{x^2}$ non $C_3 \equiv y = \sin x$, $A = \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right)$ eta $B = \left(\frac{5\pi}{2}, 1 \right)$

6.- Izan bitez $S_1 \equiv x^2 + y^2 = 1$, $S_2 \equiv x^2 + y^2 = z + 2$ eta $S_3 \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - z$ gainazalak, eta defini dezagun S_1 gainazalaren barrutik, S_2 gainazalaren gainetik eta S_3 gainazalaren azpitik mugaturiko V solidoa. Bere muga osatzen duen gainazal itxi eta zatika leunari S deituko diogu.

Izan bedi $\vec{F}(x,y,z) = \left(x + y^2 + z^2 \right) \cdot \vec{i} + \left(x^2 + y + z^2 \right) \cdot \vec{j} + \left(x^2 + y^2 + z \right) \cdot \vec{k}$ eremu bektoriala.

a) Kalkulatu V-ren bolumena.

b) Kalkulatu S gainazaletik irteten den fluxua $\vec{F}$ bektorearen eraginez.

c) Kalkulatu S gainazala osatzen duen S_3 gainazalaren zatitik irteten den fluxua $\overrightarrow{rot}(\vec{F})$ bektorearen eraginez.

d) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa $C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ kurban zehar.

7.- a) Kalkulatu $S \equiv z = 4 - x^2 - y^2$ gainazalaren zatiaren azalera $z \geq 3$ denean.

b) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ eremu bektorialaren lerro-integrala $C \equiv \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ y = x \end{cases}$ kurban zehar, $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ puntutik $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ puntura.

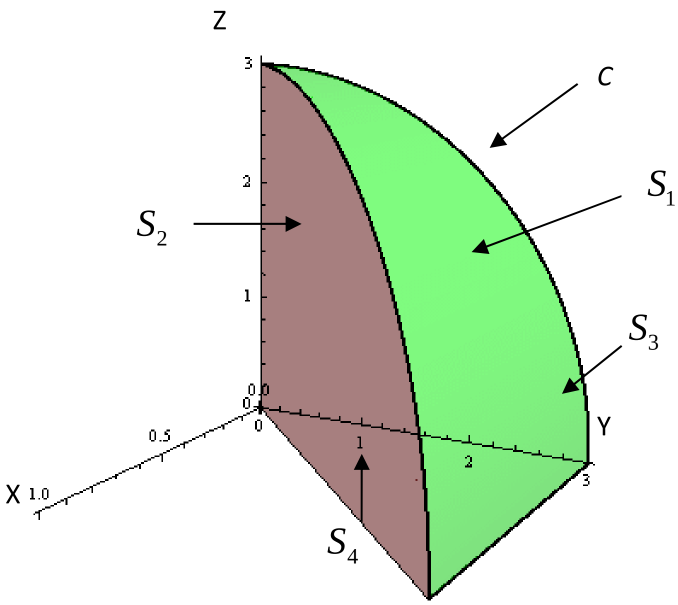
8.- Izan bedi lehenengo koadrantean S gainazal itxiak mugaturiko V solidoa (irudia ikusi), S gainazala $S_1 \equiv y^2 + z^2 = 9$, $S_2 \equiv x = \frac{y}{3}$, $S_3 \equiv x = 0$ eta $S_4 \equiv z = 0$ gainazalek osatzen dutena hain zuzen ere. Har dezagun $\vec{F}(x,y,z) = y \cdot \vec{i} + 2x \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k}$ bektorea.

a) Kalkulatu *V*-ren bolumena.

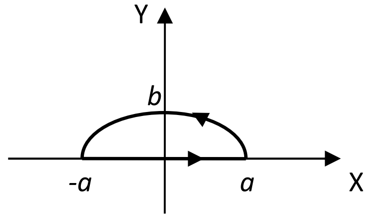
b) Kalkulatu *S* gainazaletik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxu osoa.

c) Kalkulatu *S* gainazaleko aurpegi bakoitzetik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxua. (Iradokizuna: utzi azkenerako S_1-etik irteten den fluxuaren kalkulua).

d) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa *S* gainazaleko S_1 gainazalaren zatia mugatzen duen *C* kurba itxian zehar (irudian marra lodiagoaz marrazturikoa).



9.- $\vec{F}(x,y)=\left(\sin x+\arctan y\right)\cdot\vec{i}+\left(\arctan y-2xy+\dfrac{x}{1+y^2}\right)\cdot\vec{j}$ bektorea emanik, kalkulatu bere zirkulazioa irudian erakusten den C kurba itxian zehar, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ eta $y=0$ zatiez osaturikoa hain zuzen ere.



10.- $I=\int_C\left(\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy\right)$ lerro-integrala emanik:

a) Bidearekiko independentzia dago? Non?
b) Adierazi, hurrengo hiru kasuetatik, zeinetan aplikagarria den bidearekiko independentzia, eta emandako emaitzak ondorioztatu ahal diren dagokion integrala kalkulatu gabe:

i. $I=\oint_{C_1}\left(\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy\right)=0$ non $C_1\equiv x^2+y^2=1$

ii. $I=\oint_{C_2}\left(\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy\right)=0$ non $C_2\equiv (x-2)^2+(y-2)^2=1$

iii. $I=\int_{C_3(A\to B)}\left(\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\dfrac{dx}{x^2}$ non $C_3\equiv y=\sin x$, $A=\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ eta $B=\left(\dfrac{5\pi}{2},1\right)$

11.- Izan bitez $S_1\equiv x^2+y^2=1$, $S_2\equiv x^2+y^2=z+2$ eta $S_3\equiv\sqrt{x^2+y^2}=3-z$ gainazalak, eta defini dezagun S_1 gainazalaren barrutik, S_2 gainazalaren gainetik eta S_3 gainazalaren azpitik mugaturiko V solidoa. Bere muga osatzen duen gainazal itxi eta zatika leunari S deituko diogu.

Izan bedi $\vec{F}(x,y,z)=\left(x+y^2+z^2\right)\cdot\vec{i}+\left(x^2+y+z^2\right)\cdot\vec{j}+\left(x^2+y^2+z\right)\cdot\vec{k}$ eremu bektoriala.

a) Kalkulatu V-ren bolumena.
b) Kalkulatu S gainazaletik irteten den fluxua $\vec{F}$ bektorearen eraginez.
c) Kalkulatu S gainazala osatzen duen S_3 gainazalaren zatitik irteten den fluxua $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}$ bektorearen eraginez.
d) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa $C\equiv\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2\end{cases}$ kurban zehar.

12.- a) Kalkulatu $S\equiv z=4-x^2-y^2$ gainazalaren zatiaren azalera $z\geq 3$ denean.

b) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = y\cdot\vec{i} + z\cdot\vec{j} + x\cdot\vec{k}$ eremu bektorialaren lerro-integrala $C \equiv \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ y = x \end{cases}$ kurban zehar, $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ puntutik $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ puntura.

13.- Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\cdot\vec{i} - y^2\cdot\vec{j} + \vec{k}$ bektorearen fluxua marrazkian erakusten den S gainazal irekia eta leunean zehar, $z=0$ planoan $x^2+y^2=1$ zirkunferentziak mugaturikoa.

14.- a) Kalkulatu $V \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ x^2+(y-1)^2 \ge 1 \\ x\ge 0 \quad y \ge 0 \quad z \ge 0 \end{cases}$ solidoaren bolumena.

b) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\cdot\vec{i} - (y+1)^2\cdot\vec{j} + 3z\cdot\vec{k}$ bektorearen lerro-integrala $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x^2+(y-1)^2 = 1 \end{cases}$ kurban zehar, lehenengo oktantean, $A(0,2,0)$ puntutik $B(0,0,2)$ puntura.